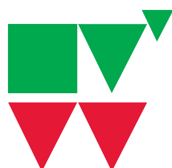
EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

DE INTRODUCTIE VAN ANALYTISCHE MEETKUNDE
WISKUNDE EN AUTISME
'MENEER ROBOT, MAG IK WAT VRAGEN?'
WISKUNDE, ZWEMMEN EN BOSSPELLEN
ONMIDDELLIJKE DIAGNOSE EN FEEDBACK
KEGELSNEDEN OP ECHTE KEGELS...

NR.2



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 90 | NOVEMBER 2014

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 90 NR 2

IN DIT NUMMER

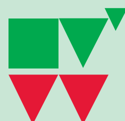






De coverafbeelding is van Rinus Roelofs: deze koepelconstructie ontstond naar aanleiding van een idee van Leonardo da Vinci, echter uitgevoerd met zowel een positieve als negatieve kromming. Website: *www.rinusroelofs.nl*

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



Kort vooraf

Minister Asscher (PvdA) zei tijdens een congres over de invloed van technologie op de arbeidsmarkt van de komende decennia: ‘Nederland moet zich schrap zetten voor een toekomst waarin er voor veel mensen weleens geen betaald werk meer zou kunnen zijn. Door computers, robots en andere vormen van automatisering dreigt de komende decennia *een aanzienlijk deel van de bestaande banen* te verdwijnen.’
Dat is opmerkelijk want Ferdi Doddema onderzoekt in deze *Euclides* juist of het tekort aan wiskundedocenten opgelost kan worden door het inzetten van een robot in de les. Zouden we ons daarmee op termijn in de vingers snijden omdat we overbodig worden? Gelukkig dreigt het zo’n vaart niet te lopen volgens Ferdi. En ook minister Asscher ziet juist een steeds grotere rol voor het onderwijs als medicijn tegen de gevolgen van automatisering. Hij noemde het belang voor werknemers van levenslang leren en daar probeert uw vakblad dan weer een bescheiden rol in te spelen. In dit nummer dan ook weer veel informatieve artikelen voor in en rond de les. Om de komende vernieuwingen in het curriculum het hoofd te kunnen bieden, ging ik deze week zelf ook weer aan de studie. Met een groep enthousiaste collega’s sloot ik aan bij een cursus Analytische Meetkunde. Na een avond opgaven maken kregen we het onderwerp weer in de vingers. En ondanks dat ik nog een beetje mopper omdat mijn favoriete ‘bewijzen en redeneren’ grotendeels verdwijnt ga ik toch met plezier uitkijken naar het nieuwe programma. In dat kader wil ik graag het artikel van Nellie Verhoef aanraden op pagina 4.
En over leren gesproken: bent u er zaterdag 8 november ook bij op de studiedag van *onze* Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren? Op basis van het thema ‘Wiskunde in beweging’ is er een vol en gevarieerd programma opgesteld. Wellicht tot dan!

Marjanne de Nijs

DE INTRODUCTIE VAN ANALYTISCHE MEETKUNDE

IN VWO 4

Nellie Verhoef
Mark Timmer
Fokke Hoeksema

Inmiddels is het begrip *Lesson Study* bij de lezers van *Euclides* wel bekend: docent-professionalisering door gezamenlijke lesvoorbereiding, observatie, evaluatie en verbetering. In dit vierde deel over dat fenomeen willen de auteurs u laten zien hoe *Lesson Study* is ingezet bij een lessenserie over analytische meetkunde.

Inleiding

In de vorige drie artikelen zijn we achtereenvolgens ingegaan op de ervaringen met *Lesson Study* in het algemeen, de moeite die docenten ervaren als zij leerlingen willen motiveren om te bewijzen in de meetkunde en de problemen die zich voordoen bij de overgang van goniometrische betrekkingen in driehoeken (klas 3) naar de beschrijving van goniometrische functies (klas 4). Ditmaal gaan we in op de parabool als conflictlijn, uitmondend in de vergelijking die bij leerlingen al bekend is.
Met de vernieuwde eindexamenprogramma's in zicht leek het een uitdaging om iets te ondernemen in de richting van analytische meetkunde in relatie tot de meetkunde in de onderbouw. Het onderwerp 'conflictlijnen' zou een mooi houvast kunnen zijn. Het idee was om twee lessen te ontwerpen waarin het redeneren van leerlingen centraal zou staan. Bij *Lesson Study* gaat het immers niet om de perfecte les of docent, maar zijn we geïnteresseerd in de leerprocessen van de leerlingen, waarbij live-observaties en discussies kernactiviteiten zijn.

Het ontwerp van de eerste les

De eerste les heeft als doel om leerlingen te laten redeneren over gelijke afstanden, waarbij ze een probleemaanpak ontwikkelen voor het construeren van conflictlijnen. Ook hopen we dat ze ontdekken dat de conflictlijn van een punt en een lijn wel eens een parabool zou kunnen zijn. De leerlingen krijgen eerst de opdracht om in groepen de landsgrenzen te bepalen in een situatie met twee krijgsheren (figuur 1). Uitgangspunt hierbij is dat een stuk land bij een krijgsheer hoort als het dichter bij hem ligt dan bij de andere krijgsheer. De verwachte reactie van de leerlingen is dat ze (1) het punt midden tussen *A* en *B* vinden, (2) cirkels om de punten tekenen en zien dat de snijpunten van cirkels met gelijke straal punten op een rechte lijn geven, of (3) direct de middelloodlijn tekenen. De tweede opdracht gaat over een situatie met vier krijgsheren (figuur 2). De verwachte reactie is dat leerlingen (1) alle middelloodlijnen tekenen, wat chaotisch wordt, en (2) landsgrenzen zoeken.



figuur 1 Het bepalen van de landsgrenzen met twee krijgsheren

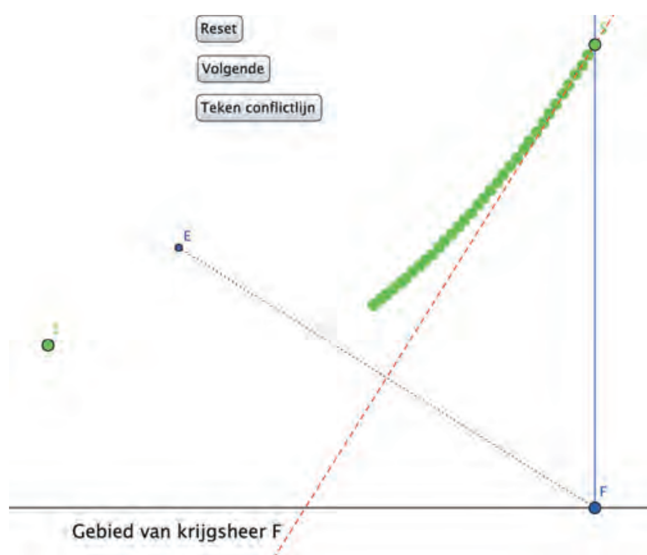


figuur 2 Het bepalen van landsgrenzen met vier krijgsheren

Nadat de leerlingen zelf hebben gepoogd om de eerste twee opgaven op te lossen, wordt de tweede opgave aan de hand van een *GeoGebra-worksheet* door de docent uitgewerkt. Hierbij wordt eerst het gebied van krijgsheer *A* bepaald, door de drie bijbehorende middelloodlijnen te tekenen. Vervolgens wordt het gebied van *B* bepaald, en zo verder. De daaropvolgende derde opdracht gaat over een situatie met het gebied van krijgsheer *F* en het kasteel van edelman *E* (figuur 3). De vraag is om te bepalen hoe de landsgrens er dan uit komt te zien; welke vorm ontstaat er? De verwachte reactie van de leerlingen is dat ze (1) het punt tussen *E* en de lijn vinden, (2) cirkels en evenwijdige lijnen tekenen, (3) punten op de landsgrens van het gebied van *F* kiezen en middelloodlijnen tekenen, (4) de conflictlijn zoeken, en/of (5) denken dat het een cirkel/parabool/hyperbool is. De docent bespreekt de aanpak met behulp van *GeoGebra* (figuur 4). Dit leidt tot een discussie over welke vorm van de grens de leerlingen denken te herkennen. Hiermee eindigt de eerste les.



figuur 3 Het bepalen van landsgrenzen met een krijgsheer en een muur



figuur 4 De constructie van de conflictlijn in *GeoGebra*

Het ontwerp van de tweede les

Het doel van de tweede les is dat de leerlingen beseffen dat de paraboolvormige landsgrens ook analytisch te beschrijven is, en dat ze een bijbehorende vergelijking kunnen vinden. De docent pakt het einde van de vorige les terug door de *GeoGebra-workshee*t nogmaals te laten zien. De verwachte reactie van de leerlingen – als het gaat om het vinden van een vergelijking – is dat ze aangeven dat er een assenstelsel nodig is. Het zou leuk zijn als ze niet op $y = x^2$ uitkomen, maar bijvoorbeeld op $y = 0{,}5x^2$ of zoiets. Het handigst is het om een willekeurig punt $P(x,y)$ te nemen en daarmee aan de slag te gaan. We verwachten dat leerlingen de y-as door E en loodrecht op de lijn kiezen (de enige logische optie). De x-as zou gekozen kunnen worden door E, op de lijn of door de top van de grafiek (halverwege E en het gebied van F). De docent inventariseert de antwoorden. Hij gaat een discussie aan over welke optie uitgewerkt wordt; ze kunnen allemaal. Hij geeft de tactische keuze van afstand 2 tussen de lijn en punt E. Dit is later handig voor het uitrekenen van afstanden. Hij zet een assenstelsel achter de grafiek op het digibord. Nu het assenstelsel gereed is, kan de vergelijking worden opgesteld. De verwachte reactie van de leerlingen is dat ze kiezen voor een aanpak via transformaties van $y = x^2$ (indien de stof bekend is), aan de slag gaan met afstanden, of direct vastlopen. Hiermee eindigt de tweede les.

Terugblik

Tijdens de uitvoering van de eerste les bleek dat leerlingen prima in staat waren om de conflictlijn van twee punten te bepalen, maar wel behoorlijk uitgedaagd werden in het geval van vier punten. Wat er echter gebeurt bij de tweede opgave lijkt op het bespreken van een procedure aan de hand van een *GeoGebra-worksheet*. Daardoor ligt de focus vooral op het oplossen van deze specifieke opdracht in plaats van op het redeneren over gelijke afstanden en het ontwikkelen van een probleemaanpak. Bij nader inzien concluderen we dat de eerste opgave eigenlijk weg kan. De leerlingen krijgen door deze opdracht het centrale begrip 'middelloodlijn' in de schoot geworpen. Bovendien ontnemen we de leerlingen de kans om probleemoplosvaardigheden te ontwikkelen: een strategie om conflictlijnen te tekenen in het geval van vier punten, bijvoorbeeld, is om dit probleem te vereenvoudigen door eerst eens een of twee punten weg te laten en te kijken wat er dan gebeurt. De klassikale discussie aan het eind van de eerste les maakt duidelijk dat sommige leerlingen al het idee hebben dat er een parabool ontstaat. Ook wordt een halve cirkel genoemd. Echter, de *GeoGebra-worksheet* past niet bij de aanpak van ieder groepje – zie bijvoorbeeld de aanpak van Arie, Bert en Coen die verderop besproken wordt. Andere groepjes lijken te komen tot het tekenen van middelloodlijnen, maar weten dan niet hoe ze verder moeten. Het is daarom maar de vraag of dit probleem door de klas goed is opgepikt. Tijdens de tweede les bleek dat leerlingen na enige discussie zelf op het kiezen van een assenstelsel uitkwamen, en dat de positionering hiervan ook aardig verliep. Het opstellen van een vergelijking door het kiezen van een willekeurig punt $P(x,y)$ ging echter moeizaam; hier was behoorlijk wat sturing van de docent bij nodig.

Een observatie

Ter illustratie van het observatieaspect van *Lesson Study* bespreken we een van de geobserveerde groepjes in meer detail. Het betreft drie jongens, hier Arie, Bert en Coen genoemd. Ze schetsen tijdens de eerste les bij de derde opdracht met hun vinger hoe de conflictlijn ongeveer gaat lopen. Al zeer vlot concluderen ze: het zal wel een parabool zijn. Bert merkt op dat je een aantal punten moet hebben om een parabool te tekenen. Ze gaan dus op zoek naar punten. Het eerste punt ligt voor de hand: precies tussen het brandpunt en de richtlijn (de top van de parabool dus). Arie en Coen tekenen verbindingslijnen tussen het brandpunt en punten op de richtlijn en bekijken dan de middens van die verbindingslijnen. Al deze punten liggen natuurlijk op de rechte lijn evenwijdig aan de richtlijn die precies tussen richtlijn en brandpunt loopt. Bert veronderstelt dat het geen rechte lijn is, maar een parabool. Er is dus iets fout gegaan. Bert komt vervolgens met een mooi idee. De afstand tussen het brandpunt en de richtlijn is 5. Als we nu vanuit het brandpunt 5 naar rechts gaan evenwijdig aan de richtlijn, dan vinden we opnieuw een punt. Arie en Coen zien dan in dat aan de andere kant hetzelfde geldt (symmetrie). Ze gebruiken dus eigenlijk de iso-afstandslijn op afstand 5 van de richtlijn en zoeken dan punten op die iso-afstandslijn die ook op afstand 5 van het brandpunt liggen. Tot slot tekenen ze een cirkel met straal 4 om het brandpunt en zoeken ze naar twee punten op die cirkel die ook op afstand 4 van de richtlijn liggen. Hier wordt dus een iso-afstandslijn van

het brandpunt getekend en wordt gezocht naar punten op die lijn. Dit is net anders dan de constructie van de vorige punten, waar wordt uitgegaan van een iso-afstandslijn van de richtlijn in plaats van de cirkel. Bij deze groep ligt het dus voor de hand om even te spreken over het tekenen van de iso-afstandslijnen vanuit zowel het brandpunt als de richtlijn.

Inspiratie om een toets te ontwerpen

De in het *Lesson Study*-team gevolgde aanpak gaat uit van conflictlijnen en laat leerlingen ervaren dat de keuze van een assenstelsel en willekeurige punten hulpmiddelen kunnen zijn om grip te krijgen op (meetkundige) probleemsituaties. In deze visie is het leren gericht op blikwisseling en de kracht van het combineren van meetkundige en analytische kennis. Daarnaast wordt ook de vaardigheid probleemoplossen belangrijk gevonden, meer dan het (alleen maar) procedureel kunnen aanpakken van problemen. Een van de deelnemende docenten heeft naast de *Lesson Study* de (meetkundige) constructie van de conflictlijnen leidend tot parabool, ellips en hyperbool onderwezen aan zijn klas wiskunde D in vwo 5. Op basis van deze lessen heeft hij een aantal toetsvragen gemaakt, zie *vakbladeuclides.nl/902verhoef*. Na het nakijken en evalueren van de toets kunnen we voorzichtig concluderen dat het aanleren van het zelf kiezen van de oorsprong, een assenstelsel en eventueel een eenheidsafstand bij deze leerlingen is gelukt: het doel is bereikt. De leerlingen kunnen dit type problemen aan – mits ze niet een al te procedureel algoritme aangeleerd hebben gekregen dat terugslaat als gemene niet-toepasbare voorkennis (de twijfel die er al was).

 *vakbladeuclides.nl/902verhoef*

Over de auteurs

Nellie Verhoef is onderzoeker en vakdidacticus wiskunde aan de Universiteit Twente. Mark Timmer is docent wiskunde aan het Carmel College Salland te Raalte. Fokke Hoeksema is docent wiskunde aan het Marianum te Groenlo en geeft colleges aan eerstejaars studenten op de Universiteit Twente. E-mailadressen: *n.c.verhoef@utwente.nl, m.timmer@alumnus.utwente.nl, fhoeksema@marianum*

STELLING VAN PYTHAGORAS

HOE VERZIN JE ZELF EEN BEWIJS?

Simon Biesheuvel

Surveilleren bij een schoolexamen betekent veel tijd om na te denken. Simon Biesheuvel bedacht op zo'n moment een bewijs voor de stelling van Pythagoras.

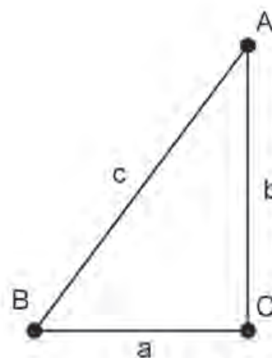
Als ik met 5 vwo wiskunde B bezig ben met meetkundige bewijzen of met het herleiden van gonioformules, geef ik ze vaak als tip om goed te kijken waar ze naartoe moeten. Dan vind je eerst een stukje van het slot van het bewijs en kun je daarna het begin en het eind naar elkaar toe praten en het ontbrekende deel van het bewijs vinden. Zelf heb ik op deze manier onlangs nog een bewijs voor de stelling van Pythagoras bedacht. Dit verhaal heb ik voorgedragen in de les. Het leek me ook voor u de moeite van het lezen waard.
Ik herinner me vaag dat ik vroeger op de HBS een bewijs van de stelling van Pythagoras kreeg via een hoogtelijn in een rechthoekige driehoek en gelijkvormige driehoeken. Daar had je natuurlijk de lengtes a, b en c bij nodig, maar ook een lengte h (hoogtelijn) en ik denk zelfs een lengte $c - x$. Die h en x moesten natuurlijk weggewerkt worden. Terwijl ik in de gymzaal zat te letten op leerlingen die een schoolexamen maakten, vroeg ik me af: zou het mogelijk zijn om een bewijs te bedenken met gelijkvormigheden, maar zonder extra letters? Het verhoudingsschema bij de gelijkvormigheid zou dan bijvoorbeeld zo moeten zijn:

c	
	c

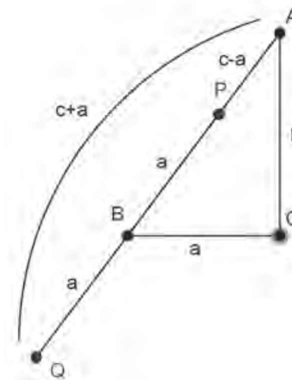
met op de twee lege plaatsen iets met product $a^2 + b^2$. Maar ik ken geen product dat $a^2 + b^2$ geeft. Wel een product dat $c^2 - a^2$ geeft en dat is eigenlijk net zo bruikbaar. Zo kwam ik op het idee van de volgende verhoudingstabel:

b	$c + a$
$c - a$	b

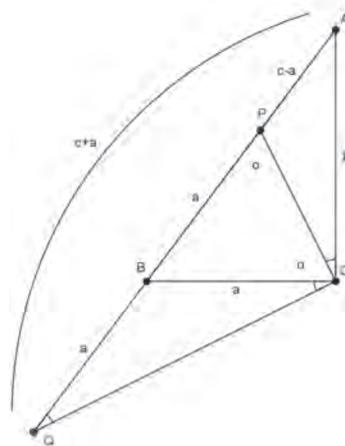
Kruisproducten geven $(c - a)(c + a) = b^2$ dus $c^2 - a^2 = b^2$ en dus $c^2 = a^2 + b^2$.
De algebra is alvast klaar, maar nu nog de verbinding met het plaatje. Oftewel: ik moet twee gelijkvormige driehoeken vinden zodat de één zijden van lengte b en $c - a$ heeft en de ander overeenkomstige zijden van lengten $c + a$ en b.
Dat gaat als volgt. Begin met een rechthoekige driehoek ABC met de rechte hoek bij C, zie figuur 1. Pas vanaf B een lengte a af op de schuine zijde en ook op het verlengde van de schuine zijde. Zie figuur 2 voor de geplaatste letters. Omdat driehoek BCP gelijkbenig is, zijn er twee gelijke basishoeken, aangegeven met een rondje in figuur 3. Ook driehoek BCQ is gelijkbenig met twee basishoeken, aangegeven met een boogje. De hoekensom in driehoek CQP geeft dat twee boogjes en twee rondjes samen 180 graden zijn. Dus boogje en rondje zijn samen 90 graden. Dus hoek ACP is ook een hoek ter grootte van 'boogje'.
Driehoeken ACP en AQC zijn nu gelijkvormig (hh) en daaruit volgt precies de gewenste verhoudingstabel. Hiermee is het gelukt om het bewijs rond te krijgen.



figuur 1



figuur 2



figuur 3

Over de auteur

Simon Biesheuvel is docent wiskunde aan het Willem de Zwijger College in Bussum.
E-mailadres: *biesheuvel@zonnet.nl*

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*.

Computer bewijst gelijk van stapelende boer



Sinds half augustus hangt bij de Britse wiskundige Thomas Hales de spreekwoordelijke vlag uit. Na tien jaar ploeteren weet hij zeker dat zijn omstreden computerbewijs van het vier eeuwen oude vermoeden van Kepler werkelijk foutloos is. Het vermoeden van Kepler zegt dat harde bollen niet dichter gestapeld kunnen worden dan hoe iedere groenteboer zijn appels of sinaasappels schikt: met de volgende vruchten steeds in de kuiltjes van de laag eronder. In 1998 publiceerde Hales een omstreden bewijs, waarbij hij een computer talloze onregelmatige stapelingen had laten narekenen. Andere wiskundigen deden een poging dat 300 pagina's tellende bewijs te verifiëren, maar besloten na jaren werk uiteindelijk dat het met de hand geen doen was. Hales' bewijs, oordeelden ze, was daarom niet waterdicht. De Brit tuigde daarom in 2003 Project Flyspeck op, waarbij moderne computersoftware wordt toegepast die wiskundige redeneringen verifieert. Een deel van het benodigde handwerk bij het invoeren van zijn bewijs liet hij in Vietnam doen door goedkope arbeidskrachten. Half augustus stuurde Hales een mail rond waarin hij aankondigde dat Flyspeck geen uitglijders in zijn Keplerbewijs uit 1998 heeft kunnen vinden. 'Ik voel me tien jaar jonger', meldde hij opgelucht. Bron: *Volkskrant*

Na 78 jaar gaat Fields Medal naar vrouw

Na een dikke driekwart eeuw alleen maar mannen heeft de prestigieuze Fiels Medal, doorgaans gezien als de Nobelprijs voor de wiskunde, zijn eerste vrouwelijke winnaar. De Iraanse wiskundige Maryam Mirkazhani van Stanford universiteit werd woensdag, met drie mannen, de vierjaarlijkse prijs voor mathematisch talent tot 40 jaar toegekend op een congres in de Zuid-Koreaanse hoofdstad Seoel. De Iraanse, sinds 2000 op Stanford, krijgt de eremedaille en een geldbedrag van vijfduizend Canadese dollars. Mirkazhani, een specialist in de theorie van geometrische vormen en complexe oppervlakken, geldt internationaal als een groot wiskundig talent. In Iran wordt ze gezien als een rolmodel voor meisjes in de wetenschap. In interviews looft ze steevast haar meisjesschool, waar gelijke kansen voor meisjes en jongens dagelijks het uitgangspunt waren. In wiskunde raakte ze pas geïnteresseerd aan het eind van haar middelbare school. Daarvoor wilde ze, opgegroeid tegen de achtergrond van de oorlog met Irak in de jaren tachtig, romanschrijver worden. Bron: *Volkskrant*

Roman met als hoofdpersoon een wiskundige bij de Lijsters

Vlak voor de zomervakantie kunnen leerlingen en docenten bij een educatieve uitgeverij een boekenpakket bestellen tegen een gering bedrag. De vijf boeken worden door de uitgeverij geselecteerd. Veel scholieren maken er, soms via de docent Nederlands, gebruik van om in de zomervakantie boeken te lezen 'voor de lijst'. Dit jaar was Peter Buwalda's *Bonita Avenue* een van de Lijsterboeken. De hoofdpersoon daarin is Siem Sigerius, een briljant wiskundige met het lichaam van een worstelaar. Hebben uw leerlingen dat boek gelezen, dan hebben ze tijdens het lezen heel wat verwijzingen gezien naar zaken die de wiskundewereld betreffen. Zo heeft Sigerius zich in de wiskunde bekwaamd nadat hij in een doos met *Panorama's* en *Libelle's* een verdwaald opgavenboekje van de Nederlandse Wiskunde Olympiade vond. Hij promoveerde op de *knot-theory*, een tak van wiskunde die 'probeert te begrijpen op hoeveel verschillende manieren een stuk touw in de knoop kan zitten' (citaat), waarvoor hij de Fieldsmedaille kreeg. Als u een leerling treft die het boek op de lijst heeft staan, kunt u hem of haar eens vragen welke wiskunde er in het boek te vinden is. Eerst zelf lezen is dan natuurlijk een must.

Wiskundemeisje in de hoofdrol bij Zomergasten en bij De Slimste Mens

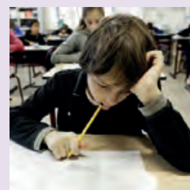


Zondagavond 17 augustus 2014 was wiskundemeisje Ionica Smeets de zomergast. De recensies over die uitzending waren bijna zonder uitzondering positief. Bas Paternotte van *ThePostOnline*: Een opmerkelijke zomergast omdat ze niet voldoet aan het profiel dat de VPRO de kijker doorgaans voorschotelt. Van een zomergast wordt namelijk verwacht dat deze wat gepresteerd heeft, een

fenomeen is, ergens een stempel op heeft gedrukt of heel erg goed is in zijn of haar vak. Smeets voldoet aan geen van deze kenmerken. Nu ja, ze is een hele goede nerd, dat wel. En dat leverde interessante televisie op. Het tempo zat erin, zowel in het gesprek als fragmenten, en het leek erop dat Wilfried de Jong het soms niet helemaal kon bijbenen. Logisch: SpongeBob SquarePants, Fibonacci-cijfers, ananassen, dennenappels en priemgetallen was ook wel erg veel voor de bijna zestiger om te behappen. De Jong wist zichzelf te herpakken door zijn grootste kwaliteit aan te spreken: de bereidheid om zich te laten verwonderen door zijn gast. Die verwondering en oprechte interesse van De Jong maken hem misschien wel de beste interviewer voor live-televisie. Kostelijke televisie en niet voor niets de best bekeken aflevering van het seizoen (tot dan toe) met 663.000 kijkers. Er is een nieuw type zomergast opgestaan, met als kernwoorden in ieder geval jong, passie en snelheid. Vóór *Zomergasten* schitterde Ionica al in zeven afleveringen van *De Slimste Mens*, een zomerquiz waarin bekende Nederlanders volgens een afvalsysteem met elkaar strijden om de titel. Veel kijkers snapten niet waarom Smeets na zeven afleveringen van *De Slimste Mens* naar huis moest in plaats van naar de finaleweek. In het geval van Ionica was het extra pijnlijk omdat ze de enige vrouw had kunnen zijn in de finale. Philip Freriks riep haar troostend uit tot de slimste vrouw van het seizoen, maar daar koopt Ionica natuurlijk niets voor. Als protest trok ze in die laatste aflevering een roze trainingspak aan, omdat het er toch niets meer toe deed. Bij het selecteren van de finalisten wordt gekeken naar hoe vaak iemand dagwinnaar is geweest, en dat was de reden dat Ionica niet terug kon komen in de finaleweek.

Wiskunde A en B beide kiezen gemakkelijker gemaakt
Naar aanleiding van een bericht van de Vereniging van Schooldecanen en Loopbaanbegeleiders (VvSL) is op het forum van de website van de NVvW enige tijd geleden de vraag gesteld wat wij vinden van de mogelijkheid om zowel wiskunde A als B te kiezen, waarbij dan wiskunde B als extra vak wordt gekozen in de vrije ruimte. In een brief aan de VvSL geeft de staatssecretaris Sander Dekker zijn visie op het kiezen van wiskunde A en wiskunde B. Over de status van het extra vak wiskunde B zegt de staatssecretaris: 'Laatstgenoemd vak [wiskunde B, red.] komt dan dus 'bovenop' het examenpakket, en wordt daarom niet betrokken bij de uitslag van het examen.' Voor de kernvakkenregeling wordt dus alleen gekeken naar het vak wiskunde A. Verder meldt de staatssecretaris: 'Het afleggen van het examen in wiskunde B als extra vak komt ook nu al in de praktijk voor; de betreffende scholen benutten hiertoe het tweede tijdvak in juni.' De staatssecretaris geeft echter toe dat 'gelijktijdige inroostering van de centrale examens in wiskunde A en B hierbij een onnodige belemmering vormt.' Daarom heeft de staatssecretaris besloten het College voor Examens te verzoeken om deze planning aan te passen. Hij zegt hierover: 'Voor het komende jaar (2015) is het examenrooster reeds vastgesteld, de genoemde wijziging is dus mogelijk vanaf 2016. De scholen zullen hierover worden geïnformeerd via de Nieuwsbrief VO en de kanalen van het College voor Examens. Vanzelfsprekend ligt de beslissing over het aanbieden van een extra vak zoals hier genoemd bij de school.' De citaten zijn afkomstig uit de brief van de staatssecretaris aan de Vereniging van Schooldecanen en Loopbaanbegeleiders.

Aanleg voor wiskunde en lezen beïnvloed door zelfde genen



De aanleg voor wiskunde en voor lezen bij kinderen wordt deels bepaald door dezelfde genen, zo blijkt uit nieuw onderzoek. Ongeveer de helft van de genen die het wiskundetalent van kinderen bepalen, zijn ook doorslaggevend voor de mate waarin ze aanleg hebben voor lezen. Waarschijnlijk beïnvloeden deze genen bepaalde hersenfuncties die bij zowel lezen als rekenen van pas komen. Dat melden onderzoekers van het University College in Londen in het wetenschappelijk tijdschrift *Nature Communications*. De wetenschappers kwamen tot hun bevindingen op basis van gegevens van een groot onderzoek waarbij twaalfjarige kinderen uit 1200 Britse gezinnen werden getest op leesvaardigheid en aanleg voor wiskunde. Ook werd genetisch onderzoek verricht op de jonge proefpersonen. Aan de studie deed een groot aantal tweelingen mee, zodat nog beter kon worden onderzocht in hoeverre de prestaties van de deelnemers genetisch waren bepaald. De resultaten suggereren dat vermoedelijk honderden of zelfs duizenden genen invloed hebben op zowel reken- als leesvaardigheid. 'Onze studie wijst niet op specifieke genen voor leesvaardigheid of rekenvaardigheid, maar suggereert dat de genetische invloed op eigenschappen als het leervermogen van mensen wordt bepaald door vele genen die allemaal een zeer kleine invloed hebben', verklaart hoofdonderzoeker Robert Plomin op nieuwssite *ScienceDaily*. De genetische invloed op leesvaardigheid en wiskundig talent is uiteraard niet allesbepalend. 'Het betekent alleen dat er in sommige gevallen wat meer inzet nodig is van de ouders, de school en de leraren om een kind op weg te helpen', aldus Plomin. Bron: *Nu.nl*

WISKUNDE EN AUTISME

DEEL 6: IN DE KLAS

Bram Arens
Danny Beckers

Leerlingen met ASS (Autisme Spectrum Stoornissen), vinden steeds vaker hun weg naar het reguliere onderwijs. Het vak wiskunde is vanwege de ondubbelzinnige vragen en antwoorden bij uitstek geschikt om het leerproces van een ASS-leerling te beïnvloeden. In dit laatste deel van deze serie blikken Bram Arens en Danny Beckers terug op de voorgaande artikelen over passend onderwijs voor deze doelgroep.

In vogelvlucht

In een reeks van vijf artikelen hebben we de problemen besproken waar wij in onze praktijk bij leerlingen met ASS vaak mee te maken hebben. Binnen de groep leerlingen met ASS is er een enorme diversiteit. Dat betekent ook dat problemen zich op heel verschillende manieren kunnen manifesteren en sommige 'symptomen' op verschillende (soms ook meerdere) achterliggende problemen kunnen duiden. In tabel 1 staan schematisch de problemen die we hebben beschreven, hoe die herkenbaar zijn en op welke manier u als docent kan helpen om die voor de leerling beheersbaar te maken.

De wiskundedocent als begeleider

Zoals we ook al eerder hebben vermeld in onze artikelen, vinden we dat de wiskundedocent in het kader van passend onderwijs een goede aanvulling kan zijn op de zorgaanpak bij leerlingen met autisme. U als docent ziet de leerling namelijk meerdere malen per week, ziet zijn prestaties en kan deze beoordelen ten opzichte van zijn medeleerlingen en ten opzichte van wat er van hem in de toekomst geëist wordt. Het tweede voordeel is dat de leerling weet dat u hem beoordeelt en door die positie sneller geneigd zal zijn om u serieus te nemen. Ten slotte is het vak wiskunde, vanwege zijn duidelijke, expliciete opbouw en structuur, bij uitstek geschikt om het leren van de leerling te sturen.
Nu is het niet zo dat elke leerling onmiddellijk staat te springen om het door u geconstateerde probleem aan te pakken. Het blijven natuurlijk pubers. Voor de leerling zijn de achterliggende problemen niet altijd duidelijk, of ze hebben daar een heel ander idee bij. Maar het concrete probleem 'een onvoldoende voor wiskunde' willen ze best oplossen. En als ze merken dat u als docent hen daarbij wilt helpen, dan zullen ze die hulp in de meeste gevallen ook aannemen. U bent als docent immers expert in uw vak; bovendien is het binnen de les normaal om hulp te krijgen. Zorgleerlingen willen meestal niet als 'speciaal' gezien worden.

Toetsanalyse als hulpmiddel

Zoals we ook in onze eerdere artikelen aangeven, verdient het de aanbeveling om toetsen geregeld te onderwerpen aan een toetsanalyse. De leerling met autisme maakt daarbij vaak niet eens de meeste fouten, maar de fouten die hij maakt, kunnen wel informatie verschaffen over achterliggende problemen. Een leerling die de standaardopgaven goed maakt, maar de opgaven die net een stapje meer vragen niet aankan, heeft een probleem dat u gewoon met hem kunt bespreken, ook al had hij een voldoende voor uw proefwerk. Dat geldt ook voor de leerling die de opdrachten uit één van de paragrafen niet heeft uitgewerkt, of voor de leerling die gewoon tijd tekort komt om de opdrachten allemaal af te maken.
Natuurlijk kan wat in eerste instantie een mooi aanknopingspunt lijkt te zijn voor de aanpak van een probleem tijdens een gesprek geheel verdampen. De leerling houdt halsstarrig vast aan zijn aanpak, en vindt dat u uw toetsen aan hem zou moeten aanpassen. Of de leerling heeft domweg die ene paragraaf niet goed bestudeerd. Ook als de toetsanalyse niet echt iets oplevert, kan het voor de leerling met autisme nuttig zijn. In elk geval zijn de fouten een aanknopingspunt om met de leerling in gesprek te gaan. U kunt met hem meegaan in zijn analyse, en daar een voorspelling aan koppelen voor een volgende toets. Of u kunt hem bijspijkeren op die punten die hij heeft gemist, en daarbij dan meteen in detail kijken hoe hij die stof oppikt en in verband brengt met de andere onderdelen van het boek. In elk geval kunt u hem erop attenderen dat het om belangrijke onderdelen gaat. Bij wiskunde bouwt de stof op: wie geen vergelijkingen kan oplossen, heeft vervolgens bij elk hoofdstuk een probleem omdat het oplossen een basisvaardigheid gaat worden.

Waar haal ik de tijd vandaan?

Op het moment dat het probleem duidelijk is en de leerling bereid is om eraan te gaan werken, kunt u remediëren. Binnen de les is er maar weinig ruimte en tijd voor differentiatie, zeker wanneer er meerdere zorgleerlingen in een groep van 30 leerlingen zitten. Het is dan ook onmogelijk om deze zorg individueel en uitgebreid te kunnen bieden. Binnen onze artikelen hebben we dan ook geprobeerd om verschillende soorten handvatten te bieden; sommige dingen zoals het zelf laten bewerken

tabel 1

	Herkennen	Aanpak
Verwoording: de leerling heeft moeite om redeneringen en gedachten in woorden om te zetten.	– lege proefwerkblaadjes; – leeg schrift; – geen gebruik kladpapier; – alleen oplossingen noteren; – onsamenhangend redeneren.	– expliciet maken dat er uitleg verwacht wordt (beter teveel dan te weinig; eindantwoord accentueren); – puntentoekenning voor deelantwoorden; – mogelijke manieren tot formuleren aandragen.
Scheiden hoofd- en bijzaken	– standaardopgaven gaan goed; – opgaven met informatie uit figuur/verhaal gaan niet; – veel uitwerkingen die nergens toe leiden.	– standaard opgaven uitbreiden met tekst en dit expliciet laten zien; – arceren/onderstrepen van getallen en/of alle belangrijke informatie; – opgaven geven waar sommige gegevens niet gebruikt worden; – bij een grote hoeveelheid gegevens zelf opgave laten verzinnen.
Verbanden leggen	– leerling reageert niet op klassikale instructie; – leerling moet iedere les verteld worden de boeken erbij te pakken; – vastlopen bij alternatieve vraagstellingen/formuleringen; – op proefwerken antwoorden van voorgaande onderdelen niet gebruiken.	– uitwerkingen vanuit verschillende invalshoeken benaderen; – expliciet verbanden benoemen; – attenderen dat lesstof uit voorgaande hoofdstukken in gebruik blijft in de stof daarna; – vraag vanuit een voorgaand hoofdstuk geven als onderdeel van een vraag in het huidige hoofdstuk; – vakoverstijgende projecten.
Initiëren	– thuis geen opgaven maken; – nauwelijks zelfstandig werken in de klas.	– kleine opdrachtjes mee naar huis geven en nakijken; – schakelmomenten inbouwen; – binnen complexere opdrachten aanleren deeltaken uit te voeren; – realistische hoeveelheden werk meegeven; – '5 minuten per dag'.

van opgaven zijn zo toegepast binnen een reguliere les. Vakoverstijgende projecten zijn zaken waar je als school voor kunt kiezen. Dit zijn mogelijkheden die in het kader van passend onderwijs een beperkte investering kosten, maar waar ook alle leerlingen profijt van kunnen hebben. Andere manieren om de leerling te helpen zijn intensiever en kosten daardoor wel meer tijd. In het kader van passend onderwijs kan een school ervoor kiezen om daarvoor taakuren bij docenten neer te leggen. Daarmee zou extra inzet kunnen worden gecompenseerd. In verband met de verplichting die elke school heeft om leerlingen ook een ontwikkelperspectief te bieden, is het sowieso goed om daar als docent bij betrokken te zijn. Wat in ieder geval belangrijk is, is dat er in het belang van de leerling een eerste stap gezet wordt. U kunt een begin maken in de richting van erkenning van het achterliggende probleem. Dan is een duurzame oplossing haalbaar geworden. Die eerste stap kan in uw les zijn.

De les als eerste stap...

Ondanks dat de stapjes om een leerling te helpen erg klein zijn en u misschien het gevoel krijgt niet veel verder te komen, helpt het deze leerlingen wel op meerdere fronten. Aan de ene kant wordt het probleem voor de leerling zelf inzichtelijker. Een leerling die bijvoorbeeld alleen maar antwoorden opschrijft en de berekeningen en redeneringen overslaat, zal alleen aan de hand van zijn slechte cijfers en het advies om meer op te schrijven, geen inzicht krijgen in wat er mis gaat. Er kan een verwoordingsprobleem aan ten grondslag liggen, of de leerling houdt sterk vast aan zijn starre denkpatroon dat het antwoord toch goed is. Door meer inzicht te krijgen in het probleem, zal het als gevolg helpen om de leerling verder te helpen met zijn ontwikkeling. In de leeftijd tussen twaalf en twintig is het nog zeker mogelijk om vaardigheden aan te leren om de beperking deels te compenseren. Waar u wel rekening mee moet houden, is dat de ontwikkeling traag verloopt. Het duurt bij sommige leerlingen een jaar voordat ze zich een nieuwe manier van werken eigen hebben gemaakt. Een nieuwe manier uitvoeren onder begeleiding lukt nog redelijk snel, alleen heeft de leerling met ASS meestal tijd nodig om het geleerde goed in te slijpen om het ook zelfstandig te kunnen uitvoeren. Dat betekent dat het in veel gevallen erg veel helpt wanneer er ook buiten uw les om op een zelfde manier met de leerling wordt gewerkt.

De les voorbij...

Wanneer de leerling uw hulp accepteert, dan is het natuurlijk van belang om een volgende stap te maken.

Voor de studievaardigheden zal er een transfer naar andere vakken gemaakt worden. Deze stap wordt veelal niet automatisch gemaakt. Door in gesprek te treden met andere docenten, kunt u bekijken welke problemen ook bij andere vakken terugkomen. Oplossingsstrategieën beklijven wel beter wanneer de leerling deze binnen verschillende situaties te horen krijgt. Uiteindelijk werkt een geboden oplossing alleen wanneer de leerling deze ook zelf toepast.
Vaak komt het voor dat de problemen die u opmerkt in uw les niet op zichzelf staan en dat er meerdere problemen tegelijk spelen. De leerling heeft dan vaak ook al meer begeleiders om zich heen die hem op allerlei gebieden coachen. Toch is het belangrijk dat u vanuit uw expertise ook bij die leerling betrokken bent. U bent immers degene die ziet hoe de leerling functioneert in een groep. U kunt de leerling inhoudelijk beoordelen en inschatten of daar nog groei in mogelijk is. Zo zal een leerling die écht heel goed is in wiskunde of informatica, maar verder niet in staat is zich te handhaven, niets hebben aan een vwo-diploma. Dat wekt namelijk de suggestie dat hij op dat niveau kan functioneren en dat kan hij niet. Dat neemt niet weg dat hij wel zijn sterke kanten verder kan ontwikkelen en daar mogelijk zelfs zijn brood mee kan gaan verdienen in een reguliere setting. Voor hem is het dan vooral belangrijk om zijn vaardigheden op sociaal vlak verder te verbeteren, naast dat hij wiskundig vooruit geholpen wordt. Door geen diploma te halen, openen zich mogelijkheden om als vrijwilliger bij een werkgever te beginnen en zich daar eerst te bewijzen alvorens in een reguliere baan te rollen.
Andersom kan een leerling die over de hele linie goed scoort, maar bij wiskunde helemaal onderuit gaat, goed presteren in het vervolg. U dient daar als onderwijsteam serieus naar te kijken: hoe belangrijk zijn de missende competenties in een vervolg. Een leerling kan zich zonder wiskunde prima handhaven in een studie letteren of politicologie, maar dan is het wel belangrijk dat hij zich vlot uit kan drukken, goed kan spreken en schrijven (niet zo maar voldoende) en vlot en nauwkeurig leest, analyseert, zich een mening vormt, maar ook naar die van een ander kan luisteren en die begrijpen. Een leerling met ASS zal het diploma van het vo op de eerste plaats zien als een toegangsbewijs tot het vervolgonderwijs. Als dat vervolg niet passend is, dan doet u die leerling tekort door eraan mee te werken hem dat diploma wel te bezorgen.

Wanneer u meer tijd heeft…

Wanneer u er geen genoeg van kunt krijgen en u tijd heeft om een ASS-leerling extra individueel te begeleiden, krijgt u veel te maken met planningsproblematiek. Voor veel leerlingen met autisme lijkt planning een probleem, maar in de meeste gevallen kunt u ervan uitgaan dat het planningsprobleem bij leerlingen met autisme een tweede ordeprobleem is. Het achterliggende probleem kan bestaan uit een gebrek aan overzicht, een probleem met de tijdbeleving, een probleem met initiëren of dat de leerling eenvoudigweg niet begrijpt wat er van hem verwacht wordt. Dat laatste kan vanuit faalangst worden versterkt. Hoe dan ook, wanneer een leerling reeds enige tijd op een verkeerde manier aan het werk is geweest maar niet door de mand is gevallen – bijvoorbeeld omdat hij prima op zijn geheugen kon werken – is het bijkomende probleem dat u hem van een ingesleten gewoonte moet afhelpen.
Veelal is een planning, al dan niet expliciet, wel bij leerlingen aanwezig. Als die er niet is, dan is er vaak een groot probleem in het leggen van verbanden. Anders kan één van de andere problemen die we hebben geschetst daarachter liggen. Zijn die problemen eenmaal aangepakt dan verdampt het probleem met plannen ook. Gebruik van agenda, agenda-*apps* op de smartphone, eventueel in combinatie met een online agenda die synchroniseert met de agenda op een pc of laptop kunnen allemaal worden ingezet om de leerling te helpen zijn planning zelf onder controle te krijgen.

Waarom ook alweer

Naast alle tips en trucs blijft het natuurlijk een feit dat het onderwijs aan leerlingen met ASS een extra investering vergt. Dat kan heel leuk zijn als het werkt zoals u had gehoopt. Als het eens niet zo werkt, of als het eens erg veel van u vraagt, is het goed om uzelf voor te houden waar u het ook alweer voor deed. De meeste van deze leerlingen hebben er veel baat bij om zo lang mogelijk in het reguliere onderwijs te verblijven. Het reguliere onderwijs biedt hen een goede voorbereiding op een vervolg. Dit kan een vervolgopleiding zijn of het werk dat de leerling na zijn opleiding gaat doen. Uiteindelijk zal de leerling namelijk een bepaalde mate van zelfstandigheid moeten aanleren om zich staande te houden in onze maatschappij. Naast het opleidingsniveau is een reguliere opleiding voor iemand met autisme ook belangrijk in sociaal opzicht. Op een reguliere school ziet hij namelijk veel voorbeelden van hoe anderen zich gedragen; hij leert zich handhaven in een reguliere setting. Indien dat hem niet teveel energie kost, is dat een goede leerschool voor situaties waarmee hij ook later te maken zal krijgen.

Wij hopen van harte dat u als docent wiskunde ook wil bijdragen aan de ontwikkeling van deze bijzondere leerlingen.

Over de auteurs

Bram Arens en Danny Beckers waren werkzaam als wiskundedocent. Beiden zijn sinds een aantal jaren werkzaam bij Bureau Beckers te Nijmegen, hét expertisecentrum voor coaching van leerlingen en studenten met ASS of ADHD, en een cognitieniveau vanaf havo.
E-mailadressen: *b.arens@bureau-beckers.nl*, *d.beckers@bureau-beckers.nl*

'MENEER ROBOT, MAG IK WAT VRAGEN?'

Ferdi Doddema

Veel wiskundigen verkiezen een carrière in het bedrijfsleven boven een carrière in het onderwijs. Ferdi Doddema onderzoekt of het tekort aan wiskundedocenten opgelost kan worden door het inzetten van een robot in de les.

Je nieuwe collega wiskunde is wel erg bijzonder, hij loopt mechanisch en hij praat mechanisch; het is een robot. Als gevolg van het grote tekort aan wiskundedocenten heeft de schooldirectie besloten een robot 'aan te nemen' als wiskundedocent. Dit scenario klinkt wellicht als toekomstmuziek, maar een robot als assistent lijkt zeker mogelijk. Erik Zagwijn is docent aan Hogeschool De Kempel (pabo) en experimenteert al met de robot als assistent in het basisonderwijs. 'Ik verwacht dat de robot een belangrijke rol in het voortgezet onderwijs kan gaan spelen', aldus Zagwijn.

De robot als wereldveroveraar

Ieder jaar verschijnen weer vele vacatures voor wiskundedocenten. Het relatief lage salaris en de hoge werkdruk van de docent zorgen ervoor dat het beroep wiskundedocent niet aantrekkelijk is voor pas afgestudeerde wiskundigen. Ook extra studiebeurzen kunnen er niet voor zorgen dat de student wiskunde voor de lerarenopleiding kiest. Daar komt bij dat veel beginnende docenten door de hoge werkdruk in het begin van hun loopbaan een carrièreswitch maken. Het gevolg is een groot tekort aan wiskundedocenten. De laatste jaren zien we dat robots steeds meer banen overnemen. Ze fabriceren auto's en over een paar jaar voeren ze zelfs operaties uit. De vraag is of het tekort aan wiskundedocenten ook opgelost kan worden door robots in te zetten.

Oma's robot

Technologie heeft de afgelopen jaren een enorme vooruitgang gemaakt. Vijftig jaar geleden hadden we niet gedacht dat we met een telefoon op het internet zouden kunnen en onze eigen elektriciteit zouden kunnen opwekken met zonnepanelen. 'Toch is het onderwijs tot op heden nauwelijks veranderd', zegt prof. dr. Vanessa Evers. Evers is hoogleraar robotica aan de Universiteit Twente. Zij doet met haar team onderzoek naar de interactie tussen mensen en robots. Technologie doet de laatste jaren haar intrede in het onderwijs, maar de robot is nog niet standaard in elke school aanwezig. De docent wiskunde is natuurlijk zoveel meer dan alleen een vakdidacticus. Zagwijn verwacht daarom niet dat de robot de docent wiskunde in zijn geheel zal vervangen. 'We moeten goed onthouden dat de robot alleen doet wat wij hem geleerd hebben, meer kan hij niet', zegt Zagwijn. 'Als de robot de docent geheel zou vervangen, dan moet hij leerdoelen in de gaten houden, breed kunnen anticiperen op reacties in de klas en gedurende een langere tijd kinderen in de gaten houden. Zo ver zijn we nog niet', voegt Evers hier aan toe. Evers denkt wel dat de robot een rol kan gaan spelen in het onderwijs. 'Ik vergelijk het met de robot bij mijn oma thuis. De robot zorgt niet voor mijn oma, nee, mijn oma gebruikt robotische technologie om voor zichzelf te kunnen zorgen. Op die manier denk ik dat het ook in het onderwijs past; de docent gebruikt de robot als onderdeel van het didactische plan.'





NAOProject de Kempel, Helmond

De domme robot

In de experimenten die Zagwijn doet met de robot, genaamd robot Nao, fungeert de robot als assistent. Hij kan onder andere afbeeldingen herkennen en daar vervol-

gens iets over vertellen. Laat een leerling bijvoorbeeld een kaart van de provincie Groningen zien, dan vertelt de robot iets over Groningen. De robot in de klas heeft voor hem twee doelen. Ten eerste is het enorm motiverend door het mensachtige en ten tweede kan de robot op een betekenisvolle manier het leerproces van de leerlingen ondersteunen. Op die manier zou ook de wiskundedocent de robot kunnen inzetten.
Als assistent kan de robot meer dan alleen uitleggen, hij kan bijvoorbeeld nakijken. Een leerling maakt een opdracht op een digitaal werkblad en stuurt deze naar de robot. De robot kijkt de opdracht na en geeft de leerling gerichte feedback. Op die manier kan de docent zich richten op andere leerlingen in de klas die extra aandacht vereisen. Ans Koster, conrector op het Dollard College te Winschoten, ziet de robot als assistent in de klas wel zitten. 'Dat experiment durf ik zeker wel aan te gaan', vertelt ze enthousiast. Evers ziet wel mogelijkheden in de robot voor de klas als *telepresence*-robot. Leerlingen kijken dan naar een robot voor de klas die uitleg geeft en op het bord schrijft terwijl op een andere locatie een docent de uitleg live aan het geven is. De docent bestuurt de robot en de leerlingen horen de stem van de wiskundedocent. Op die manier kan een docent op meerdere plekken tegelijk zijn. De rol van de robot is dan wel anders dan die van de huidige docent. De robot geeft op die manier namelijk alleen klassikale uitleg en kan niet reageren op vragen van leerlingen. De robot kan ook een rol gaan spelen bij het individueel aanleren van de wiskundestof, legt Evers uit. 'Wij denken dat het individueel doorspitten van lesmateriaal interessanter en leerzamer is als je dat in een sociale context doet. Dat kan met een klasgenoot, maar het kan ook dat het lesmateriaal zelf socialer of interactiever wordt'. Welke rol de robot dan zou gaan spelen, weet Evers nog niet. 'Mogelijk rollen zijn een tutor, een vriendje om samen mee te leren of een domme rol waardoor de leerling de docent is.'

De aap en de olifant

Doordat de robot er steeds menselijker uit gaat zien, gaan leerlingen ook menselijke eigenschappen aan de robot verbinden. Zagwijn vertelt dat leerlingen vragen of robot Nao een jongen of een meisje is en of hij ook verliefd kan worden. Toch is het bewegen en praten van de robot nog steeds erg mechanisch. Zagwijn legt uit dat dit geen problemen geeft. 'Ik vergelijk het met naar de dierentuin gaan; als je naar een aap kijkt, verwacht je iets anders dan bij een olifant. Hetzelfde geldt voor de robot; als je naar de robot kijkt, verwacht je niet de bewegingen en stem van een mens.'
De reacties op robot Nao zijn erg goed. 'Op de basisscholen merk ik dat zowel leerkrachten als leerlingen erg enthousiast zijn over de robot. Ik verwacht dat het effect van "op deze manier leren is leuk" ook in het voortgezet onderwijs bestaat', aldus Zagwijn. Evers beaamt dit en legt uit dat robots in staat zijn emoties te herkennen en hierop in te spelen. 'De robot ziet sociale interacties tussen leerlingen. Op die manier kan hij een leerling die buitengesloten wordt bij de groep betrekken.' Leerlingen zien het wel voor zich om les te krijgen van een robot, maar het roept ook vragen bij hen op. 'Hoe moet ik de robot dan aanspreken? Met meneer robot?', vraagt een leerling uit 3 havo. 'Ik zou de docent wel gaan missen', voegt een andere leerling toe. Docenten wiskunde lijkt een robot als assistent wel wat. 'Ik durf wel te stellen dat een robot mij niet kan vervangen, maar als assistent wil ik het best wel proberen. En is de accu van de robot leeg, dan ben ik er altijd nog', voegt een collega toe.

Lok de student, niet de robot

Het tekort aan wiskundedocenten kan dus niet opgelost worden door robots in te zetten. Wel kan de docent de robot inzetten als assistent. In geval van nood kan de telepresence robot gebruikt worden, zoals Evers voorstelde. 'Ons doel is zeker niet om de wiskundedocent te vervangen door een robot. Als het probleem is dat er te weinig wiskundedocenten zijn, dan vind ik dat het geld beter gebruikt kan worden om het beroep aantrekkelijker te maken dan dat het in de ontwikkeling van robots gestopt wordt', zegt Evers. Het is te verwachten dat de robot in de toekomst zijn intrede zal maken in het onderwijs. De docent kan de robot laten nakijken en zo de werkdruk verlagen of aan het werk zetten met een groepje leerlingen om op die manier beter te kunnen differentiëren in de klas. Het is te verwachten dat hierdoor de rol van de wiskundedocent de komende jaren sterk zal veranderen.

Over de auteur

Ferdi Doddema is tweedegraads docent wiskunde en in opleiding voor de eerstegraads bevoegdheid.
E-mailadres: *f.doddema@student.rug.nl*

WEBSITE

JAARVERSLAGEN NVvW EN *EUCLIDES*

Tijdens de jaarvergadering van de *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* op **zaterdag 8 november 2014** staan de jaarverslagen van de NVvW en *Euclides* op de agenda. Deze verslagen zijn opgenomen in de digitale editie van *Euclides* jaargang 90 nummer 2.

 *vakbladeuclides.nl/902nvvw*

 *vakbladeuclides.nl/902euclides*

WISKUNDE, ZWEMMEN EN BOSSPELLEN

Birgit van Dalen

Al ruim twintig jaar organiseert stichting Vierkant voor Wiskunde jaarlijks zomerkampen voor middelbare scholieren. Birgit van Dalen was deze zomer begeleider bij zo'n kamp en doet verslag.



Zomerkampen voor kinderen en jongeren zijn er in alle soorten en maten. Maar dat er ook wiskundekampen bestaan, is voor veel mensen een verrassing en de meeste van uw leerlingen zouden ongetwijfeld gruwen bij het idee van een week lang wiskunde doen in de zomervakantie. Maar wie weet heeft u ook wel een leerling voor wie het juist een aantrekkelijk idee is. Bij mij op school zijn er twee leerlingen die al jarenlang elke zomer op wiskundekamp gaan. Wat ze daar vinden? Speelse en afwisselende wiskunde, maar vooral ook heel veel leeftijdsgenoten met vergelijkbare interesses. Heel belangrijk voor bijna elke kampganger en een reden om elk jaar weer terug te komen.

Kamp C, voor bovenbouwleerlingen van de middelbare school, zat dit jaar helemaal volgeboekt: 54 deelnemers. Samen met twintig begeleiders (allemaal vrijwilligers, waarvan ik er een was) streken zij vijf dagen neer in Heino, waar een mooi zomerkampterrein is. Op het programma stond zo'n vijf uur wiskunde per dag, maar ook echte kampactiviteiten als zwemmen, bosspellen (met een wiskundig tintje; Pythagoras speelde een rol in één van de bosspellen), vlotten bouwen, een hoogteparcours doorlopen en nog meer. Maar ook activiteiten die geen wiskunde zijn, maar die je toch ook niet zo gauw zou aantreffen op een ander zomerkamp, zoals een workshop luciferkubussen bouwen, zie figuur 1. De echte doorzetters gingen ook de dagen erna in de vrije tijd nog verder om hun kubus te perfectioneren.



figuur 1 Foto van luciferkubusbouwers

De wiskunde in het programma was zeer gevarieerd. Zo werd er een ochtend onderzoek gedaan naar drakenpopulaties op Rottumerplaat, waarbij de deelnemers kennismaakten met dynamische systemen. Maar ook waren er kleine puzzeltjes om aan te werken (zie kader voor een voorbeeld) en grote problemen waar juist de hele week aan gewerkt werd. Zo waren deelnemers bijvoorbeeld de hele week bezig met *non-zero-sum-games*, waar op maandag een introducerende workshop over gegeven was. Een *non-zero-sum-game* heeft als eigenschap dat het verlies van de ene speler niet automatisch winst voor de andere speler betekent. Ze kunnen ook allebei verliezen of allebei winnen. In de workshop werd onder andere het spel *Split or Steal* besproken. Hier kiezen twee spelers onafhankelijk van elkaar voor *Split* of voor *Steal*. Kiezen ze beide *Split*, dan wordt het geld gelijk verdeeld over de twee spelers. Kiest de een *Split* en de ander *Steal*, dan krijgt de laatste alles en de eerste niets. Kiezen ze beide *Steal*, dan krijgt niemand iets. De spelers mogen van tevoren overleggen en gaan uiteraard allebei voor hun eigen winst. Dat betekent dat als ze van tevoren met elkaar afspreken dat ze beide voor *Split* zullen gaan, het voor elk van hen op het laatste moment toch de beste keuze is om de afspraak te doorbreken en *Steal* te kiezen. Maar als allebei de spelers zo redeneren, krijgt dus juist niemand iets...

Dit spelletje wordt nog interessanter als je het bijvoorbeeld tien keer achter elkaar speelt. Dan heeft het breken van de afspraak in een vroege ronde natuurlijk invloed op het vertrouwen van de andere speler. Als je een keer stiekem *Steal* speelt, dan zal de andere speler waarschijnlijk reageren door vanaf dat moment alleen nog maar *Steal* te kiezen, want hij kan jou niet meer vertrouwen. Dus nu is de motivatie groter om daadwerkelijk je aan de afspraak te houden en voor *Split* te





gaan. Echter, in de laatste ronde is dat natuurlijk niet meer relevant, dus kun je alsnog *Steal* kiezen en er met het geld vandoor gaan. Maar als de andere speler ook zo redeneert, doet hij dat ook, en doet dus eigenlijk de voorlaatste ronde er al niet meer toe voor het vertrouwen en kun je dan al *Steal* kiezen. Maar als de andere speler ook zo redeneert... Waar houdt dit op? En wat verandert er als je niet van tevoren weet hoeveel rondes er gespeeld zullen worden? Misschien leuk om eens in een verloren kwartiertje met een klas over te discussiëren.

Na de workshop begon het 'echte' spel, waar alle deelnemers aan mee konden doen. Dit bestond uit een serie van verschillende *non-zero-sum-games*, verspreid over de week, waarbij elke dag een aantal deelnemers afviel. Het eerste spel wil ik nog even noemen, omdat het wellicht ook leuk zou kunnen zijn voor in de klas, bijvoorbeeld als denkactiviteit. Elke deelnemer moest een briefje inleveren met daarop een positief geheel getal kleiner dan 30. Vervolgens zou het gemiddelde worden berekend en elke deelnemer die een getal kleiner dan 2/3 van het gemiddelde had ingeleverd, kreeg zijn eigen getal als punten. De rest kreeg niets.

Al snel werd door vrijwel alle deelnemers beredeneerd dat een getal groter dan 20 inleveren geen zin had, want dat kon nooit kleiner dan 2/3 van het gemiddelde worden. Maar ja, als iedereen dat bedenkt, dan worden er geen getallen groter dan 20 ingeleverd en wordt het gemiddelde dus ook nooit groter dan 20. Dus de getallen groter dan (ongeveer) 14 gaan ook niets opleveren. Maar als iedereen dat ook bedenkt, dan wordt het gemiddelde nooit groter dan 14. Enzovoort. Eén van de deelnemers merkte al gauw op dat iedereen dus gewoon een 1 moet inleveren, want grotere getallen hebben geen zin. Maar als iedereen een 1 inlevert, wordt het gemiddelde ook 1 en krijgt niemand punten. Kortom, een zinloos spel. Of toch niet? Hier speelt niet alleen wiskunde, maar ook psychologie een rol. En natuurlijk kunnen er ook nog verbonden gesloten worden en deelnemers omgekocht worden. Al met al kwam het gemiddelde iets boven de 4,5 uit en kreeg iedereen die een 1, 2 of 3 ingeleverd had, dat getal als punten.

Heeft u ook een leerling die hier enthousiast van wordt en wel eens op wiskundekamp zou willen? Laat hem of haar dan eens op de website van Vierkant voor Wiskunde kijken. En mocht u zelf tegen weinig slaap kunnen en wel een week wiskunde willen doen met een groep superleuke kinderen, dan kunt u zich altijd aanmelden als vrijwilliger.

Link: *www.vierkantvoorwiskunde.nl*

Over de auteur
Birgit van Dalen was deze zomer begeleider bij één van de zomerkampen van Vierkant voor Wiskunde en heeft dit in eerdere jaren ook al vaak gedaan. In het dagelijks leven is zij docent wiskunde op het Aloysius College in Den Haag, organisator bij de Nederlandse Wiskunde Olympiade en adjunct-hoofdredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *birgit@vierkantvoorwiskunde.nl*

Voorbeeld van een klein puzzeltje:
Een lange trap heeft 750 treden. Op elke trede staat een kabouter en iedere kabouter heeft een muts op. De kabouters weten niet van zichzelf welke kleur muts ze op hebben, maar ze weten dat er maar drie verschillende kleuren zijn en dat er 376 rode, 375 blauwe en 374 gele mutsen beschikbaar zijn. Verder kunnen de kabouters zien welke kleur mutsen alle kabouters die lager staan op hebben. Van boven naar beneden wordt nu aan iedere kabouter gevraagd of ze weten welke kleur muts ze op hebben. Iedere andere kabouter kan het antwoord horen. De eerste 267 kabouters antwoorden dat ze het niet weten. Kabouter nummer 268 antwoordt dat hij het wel weet. Welke kleur muts heeft deze kabouter op?

UITDAGENDE PROBLEMEN

MIRAKEL VAN MORLEY

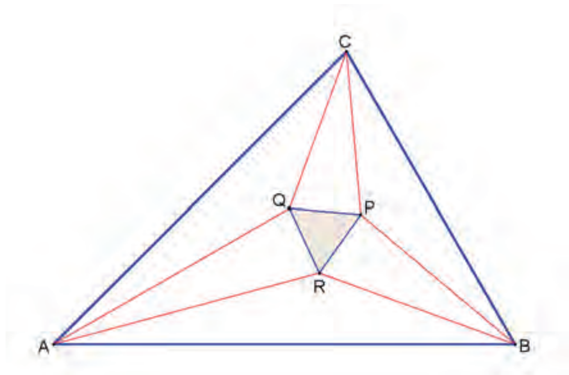
Jacques Jansen



Een vergeten stelling uit de vlakke meetkunde was voor Jacques Jansen aanleiding om lesmateriaal hierover te ontwikkelen voor zijn leerlingen. In dit artikel vertelt hij over het proces en over de reacties van de leerlingen.

In mijn beeldhouwgroep tref ik bij de start van een cursusjaar een oude bekende. Hij heet Ad en is al heel lang gepensioneerd. Ad weet dat ik wiskundedocent ben en legt mij in de pauze een meetkundeprobleem voor waar hij zelf niet uitgekomen is. Het probleem gaat over een mooie eigenschap van trisectrices in een driehoek. 'Of ik dat even wil oplossen', is het verzoek van Ad.

Als men in een willekeurige driehoek *ABC* de hoeken in drie gelijke stukken deelt, vormen de snijpunten van de steeds tegen de zijden aanliggende driedelingslijnen een gelijkzijdige driehoek *PQR*. Zie figuur 1.



figuur 1

Deze bewering wordt de Stelling van Morley genoemd, ook wel de Trisectricestelling.[1] Een voor de hand liggende strategie is: bewijzen dat twee hoeken van driehoek *PQR* elk 60 graden zijn. Maar gaat dat lukken? Ter plekke lukt het mij niet en thuis evenmin. Via een studievriend[2] kom ik er achter dat het om een oud meetkundeprobleem gaat en wel om 'Het Mirakel van Morley'. De betekenis van mirakel kan zijn: een rationeel onverklaarbare gebeurtenis. Hier ligt een uitdaging voor leerlingen om dit probleem te bestuderen. Maar daarvóór is het nog een uitdaging voor de docent om goed en begrijpelijk materiaal hierbij te maken, zodat de leerlingen erin kunnen slagen om een bewijs voor deze stelling te geven. Ik ben de uitdaging met veel plezier aangegaan.

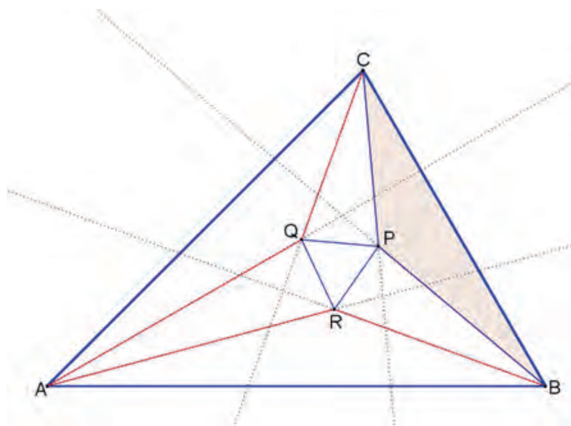
Achtergrond

Eerst maar op zoek naar wat achtergrondinformatie. De stelling is in 1904 geponeerd door Frank Morley (1860-1937), een vooraanstaand Engels-Amerikaans wiskundige. Hij was vooral bekend om zijn onderwijs en onderzoek op het gebied van algebra en meetkunde. Hij stond ook bekend als een sterk schaker. Zijn zoon Frank, ook wiskundige, schreef over zijn vader het volgende: 'Hij tastte dan in zijn vestzakje naar een potloodstompje van een paar centimeter en in een zijzak naar een oude enveloppe om vervolgens wat steels naar zijn studeerkamer te verdwijnen. Mijn moeder riep dan uit: "Frank, je gaat niet werken!" en het antwoord was steevast: "Min of meer, een beetje maar" - en dan ging de deur van de studeerkamer dicht.' Net zoals bij de Stelling van Pythagoras zijn er veel bewijzen geleverd voor het Mirakel van Morley. Bijna al deze bewijzen zijn indirect. Eén ervan is behandeld door collega Bert Boon in 2001.[3] Er blijkt echter ook één direct bewijs te zijn.
Het aardige van dit bewijs is dat alle goniometrische formules van vwo wiskunde B in de leerjaren vijf en zes aan de orde komen, inclusief de Simpsonformules die in het nieuwe wiskunde B-programma afwezig zijn. Dit lijkt dus een heel geschikt bewijs om mijn materiaal op te baseren.

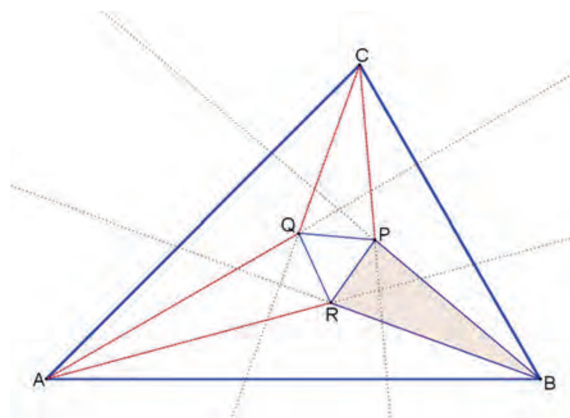
Aan de slag

Aan mij de taak om het goniobewijs grondig te bestuderen en elke stap goed te analyseren, en het vervolgens zo op papier te zetten dat een B- of D-leerling die dit bestudeert, erin slaagt om het hele bewijs in al zijn facetten te doorzien. Voor het schrijven van het lesmateriaal gebruik ik de volgende opzet:

- start met wat ze al weten: bissectrices en de eigenschappen ervan;
- een geschikte driehoek uitkiezen en met behulp van *GeoGebra* alle trisectrices tekenen;
- afspraken maken en de grote lijn van het bewijs geven;
- overzicht geven van hulpmiddelen uit de goniometrie;
- duidelijk de tussenresultaten, oogsten genoemd, aangeven;
- uitwerking van de details;
- reflecteren op de gebruikte formules en elegantie van het bewijs;
- uitdaging voor verder onderzoek.



figuur 2



figuur 3

Het bewijs in grote lijnen

In plaats van bewijzen dat de hoeken van driehoek *PQR* gelijk zijn aan 60 graden, gaan we bewijzen dat de zijden even lang zijn. We proberen goniometrische uitdrukkingen voor de zijden te vinden, te beginnen met de zijden van driehoek *ABC* zelf. Driehoek *ABC* is zo gekozen dat de diameter van de omgeschreven cirkel gelijk is aan 1 en waarbij $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$.
Er geldt: $AB = \sin(3\gamma)$; $BC = \sin(3\alpha)$ en $AC = \sin(3\beta)$.
Het zal uiteindelijk lukken om via een goniometrische uitdrukking van *BP* en *BR* met behulp van toepassing van gonioformules in de driehoeken *CPB* en *BRP* (de gekleurde driehoeken in figuur 2 en 3) aan te tonen dat $PR = 4\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma)$. Vervolgens wordt door cyclische wisseling duidelijk dat de drie zijden van driehoek *PQR* even lang zijn.

Uittesten op leerlingen

Na het schrijven van het materiaal lijkt het mij belangrijk om de tekst bij een aantal leerlingen uit te proberen. Een vijftal leerlingen van mijn collega uit 5 vwo wiskunde D gaat aan de slag, zie figuur 4. 'Kunnen zij deze leerstof wel aan?' vraag ik me af. Zij hebben, op één leerling na, nog maar weinig gonioformules gehad. Mijn collega gaat met de leerlingen toch de uitdaging aan. De leerlingen krijgen naast het maken van de praktische opdracht ook de taak mee om te letten op de formuleringen van de vragen. Zijn de vragen wel duidelijk gesteld?
Het vijftal leerlingen slaagde er wonderwel goed in om de opdrachten te maken. Daarnaast wisten ze nuttig commentaar te geven op de vragen. Opdracht 3 beoordeelden ze als verwarrend:



figuur 4

Om te bewijzen dat een driehoek gelijkzijdig is, lijkt het voor de hand liggend om van twee hoeken aan te tonen dat ze elk zestig graden groot zijn. Probeer een bewijs voor de Trisectricestelling te leveren voor een willekeurige driehoek *ABC* en schrijf op welke problemen je tegenkomt.

Met de reacties van de leerlingen kom ik tot de volgende bijstelling:

Om te bewijzen dat driehoek *PQR*, zie figuur 1, gelijkzijdig is, lijkt het voor de hand liggend om van twee hoeken aan te tonen dat ze elk zestig graden groot zijn. In het verleden zijn wiskundigen er niet in geslaagd om via deze weg een direct bewijs te leveren. Toch is het de moeite waard om een poging te wagen en na te gaan tegen welke problemen je aanloopt. Probeer dit bewijs te leveren voor een willekeurige driehoek *ABC* en schrijf op welke problemen je hierbij tegenkomt.

De definitieve versie van het materiaal is terug te vinden op *vakbladeuclides.nl/902jansen*: het boekje voor de leerlingen en ook een bestand met de uitwerkingen op alle opdrachten.

Terugblik

In het bewijs voor de stelling van Morley zijn bijna alle gonioformules uit het wiskunde B-programma aan de orde gekomen. Het is dus een goede training voor omgaan met deze formules, voor B-leerlingen uit 6 vwo of D-leerlingen uit 5 of 6 vwo. Verder kunnen de stelling en het bewijs de leerlingen nieuwsgierig maken en zijn er genoeg mogelijkheden voor verder onderzoek. Zo zou je, bijvoorbeeld met *GeoGebra*, ook eens kunnen kijken naar de buitentrisectrices van een driehoek.

Ad van de beeldhouwgroep vindt dit bewijs maar niks. Te veel formules en te veel gemanipuleer met formules. Ad wil graag een elegant bewijs. Dat kan, maar het wordt dan wel een indirect bewijs.
Ook dit zou wellicht een interessant onderwerp voor een praktische opdracht kunnen zijn. Molenbroek, geen onbekende in wiskundeland, meldt in zijn meetkundeboek[4] dat in jaargang IX van tijdschrift *Euclides* op bladzijden 40-55 negen bewijzen van deze stelling staan. Is deze stelling miraculeus? Het grootste raadsel is waarom deze stelling pas in de twintigste eeuw is benoemd. Volgens sommige wiskundigen uit de tijd van Morley is de stelling wellicht in eerdere tijden vergeten vanwege de onuitvoerbaarheid van de driedeling van een hoek met passer en liniaal.

Ook zin om materiaal te schrijven voor uw leerlingen? Gewoon doen. Natuurlijk is het wel handig om die kritische collega te vragen om over uw schouder mee te kijken. En dan de leerlingen. Hun uitwerkingen en meningen zijn van groot belang. Zij leveren het materiaal om uw stuk uiteindelijk beter te maken en te verfijnen. Daar kan de volgende groep leerlingen weer mooi van profiteren.

Noten en referenties

[1] Pickover, C.A. (2014). *Het Wiskunde Boek*. Librero
[2] Mathijs Wielders, oud-docent Open Universiteit
[3] Boon, B. (2001). De stelling van Morley, een zoektocht. *Nieuwe Wiskrant 21*(1), 9-12.
[4] Molenbroek, P. (1939). *Leerboek der Vlakke Meetkunde*. Groningen: Noordhoff.

De site van Dick Klingens: *www.pandd.demon.nl/morley2.htm*
www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.html van Alexander Bogolmolny bevat 28 bewijzen van de stelling!
Zie ook bladzijde 24 uit het boek van Glaeser, G., & Polthier, K. (2012). *Wiskunde in Beeld*. Van Veen Magazines B.V. (ISBN 9789085712503).

vakbladeuclides.nl/902jansen

Over de auteur

Jacques Jansen was 40 jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu. E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

KLEINTJE DIDACTIEK

Op de basisschool is het model van verlengde instructie gemeengoed. Dit model pas ik sinds enkele jaren ook met succes toe in mijn lessen. Hierbij start ik de les kort met een klassikale instructie, bijvoorbeeld over een nieuwe theorie, een kernopgave van het huiswerk of de nieuwe stof. Daarna beantwoord ik klassikaal vragen over het huiswerk. De eis is dat minimaal 15-20% van de aanwezigen aangeeft dat de vraag moet worden besproken. Als het er minder zijn, dan ga ik later in de les bij die enkele leerling langs. Dat heeft als voordeel dat leerlingen *moeten* aangeven waar ze problemen mee hebben, anders krijgen ze geen hulp. Vervolgens ga ik verder met wat de verlengde instructie wordt genoemd. In overleg met de leerlingen die ik deels aanwijs en die deels op eigen verzoek vooraan komen zitten, maken we gezamenlijk opgaven van het nieuwe huiswerk. Daarbij zijn de leerlingen zoveel mogelijk aan het woord en probeer ik met allerlei vraagtechnieken opstapjes te bieden (*scaffolding* heet dat in de vakliteratuur). Soms heb ik me vergist in de moeilijkheidsgraad van opgaven en doet ineens de halve klas mee. Dat neem ik dan mee voor de volgende les. Maar meestal werk ik met dit groepje zo'n drie opgaven door in 20-25 minuten. Ik heb daarna dan nog 10-15 minuten over om rond te lopen voor leerlingen die een vraag hebben. Veel van de individuele huiswerkvragen zijn op dat moment al opgelost door overleg met een medeleerling.
Deze werkwijze heeft een aantal positieve gevolgen:
- het aantal zware onvoldoenden is fors verminderd en in sommige jaren zelfs nul;
- leerlingen die wiskunde lastig vinden, kunnen makkelijker huiswerk maken omdat ze niet meer bij elke huiswerkopgave vastlopen;
- het zelfvertrouwen van zwakkere leerlingen neemt toe.

Vooral de eerste jaren had deze methode voor mij en mijn leerlingen ook nadelen:
- ik kwam niet altijd toe aan de vragen van individuele leerlingen of van de rest van de klas. Door eerst het huiswerk te bespreken, indien nodig, en dan pas de verlengde instructie te doen, is dit probleem vrijwel verdwenen;
- voor leerlingen die meer aankunnen, biedt dit model geen oplossing.

Lonneke Boels

meer lezen: *vakbladeuclides.nl/902boels*

HET FIZIER GERICHT OP...

DE ONDERBOUW

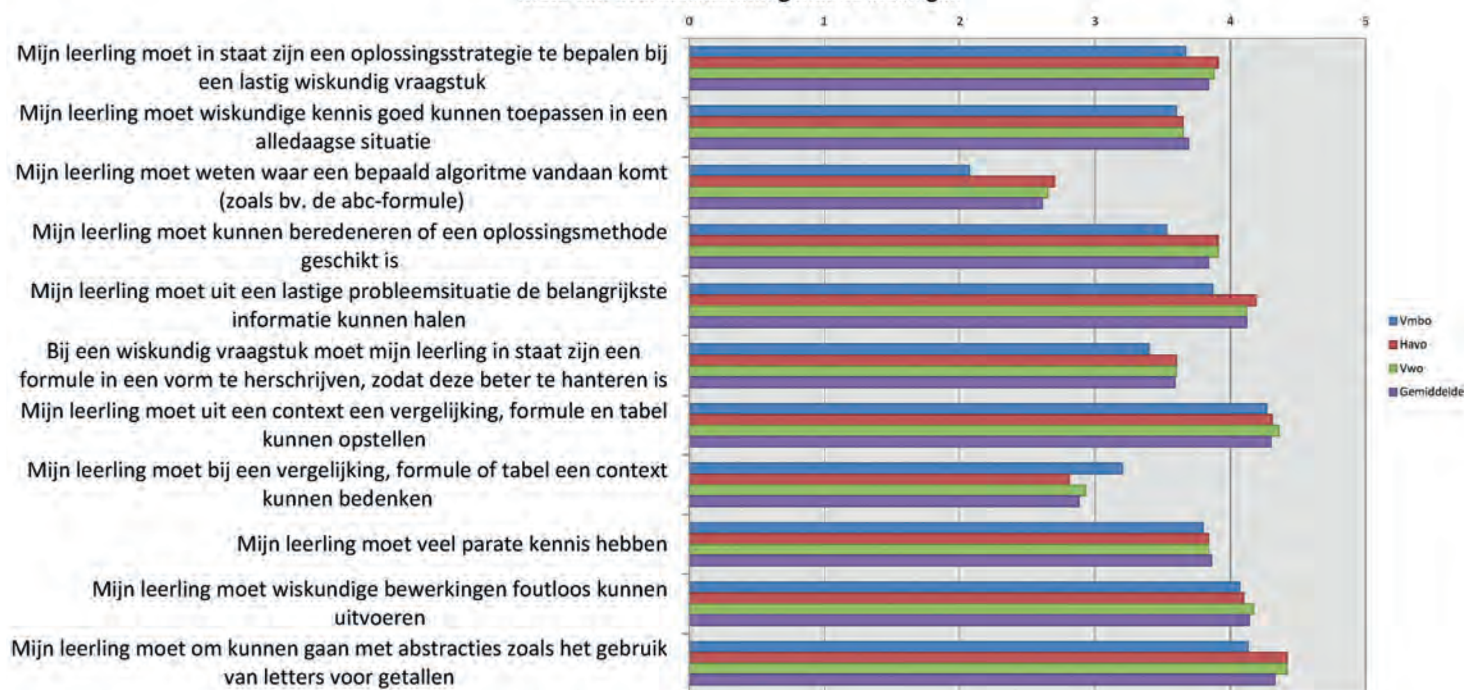
Femke Veldhoen
Paul Drijvers

In FIzier belichten medewerkers van het Freudenthal Instituut een thema uit hun werk en slaan hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering de resultaten van een onderzoek naar kernvaardigheden in de onderbouw.



Momenteel is er veel te doen over de toetsing van rekenen en wiskunde in het primair en voortgezet onderwijs. In het politieke streven naar verhoging van het niveau van het Nederlandse onderwijs spelen al dan niet verplichte toetsen een belangrijke rol. Denk aan de rekentoets vo en aan de Diagnostische Tussentijdse Toets (afgekort tot DTT). De DTT is een diagnostische toets die wordt afgenomen in vmbo 2 en havo/vwo 3 met het doel om leerlingen, ouders en docenten inzicht te geven in de stand van zaken op weg naar het eindexamen.

Hoewel de politieke besluitvorming rond de DTT nog gaande is, wordt al nagedacht over de vraag welke informatie een dergelijke toets in de ogen van docenten zou moeten opleveren. Wat beschouwen docenten als kernpunten in het wiskundeonderwijs in de onderbouw waarover de DTT hen zou kunnen informeren? Als aanzet tot de identificatie van dergelijke kernpunten en vaardigheden heeft Femke Veldhoen in het voorjaar van 2014 een bacheloronderzoek uitgevoerd met als titel *De kern van het curriculum wiskunde in de onderbouw. Beelden*



van wiskundeleraren bij een tussentijdse evaluatie van wiskunde. De centrale vraagstelling van dit kleinschalige onderzoek luidt: Wat is volgens wiskundedocenten de kern van het onderbouwcurriculum?
Om deze vraag te beantwoorden, is een online vragenlijst afgenomen, verspreid via de *WiskundE-brief*. Hierin is een elftal stellingen over verschillende vaardigheden van leerlingen voorgelegd aan de docenten. De vragenlijst is door 51 docenten ingevuld. De vier vaardigheden die volgens de uitkomst van het onderzoek door de docenten als meest belangrijk genoemd worden, zijn:

1. het uitvoeren van wiskundige bewerkingen;
2. uit een lastige probleemsituatie de belangrijkste informatie kunnen halen;
3. uit een context een vergelijking/formule/tabel/enzovoort opstellen;
4. omgaan met abstracte voorbeelden zoals het gebruik van letters voor getallen.

Het algemene beeld is dat docenten als kernvaardigheden uit het onderbouwcurriculum wiskunde beschouwen: het uitvoeren van bewerkingen, het omgaan met abstracties, het destilleren van informatie uit een probleemsituatie en het opstellen van daarbij passende vergelijkingen of andere representaties. De docenten vonden voor het vmbo de derde vaardigheid wat minder belangrijk en hadden in plaats daarvan parate kennis hoog op het lijstje staan. Wat aan deze uitkomst interessant is, is dat twee aspecten van wiskundeonderwijs die in discussies in de afgelopen jaren vaak als tegengesteld werden neergezet, namelijk het oefenen van basisvaardigheden en het gebruik van contexten, door de docenten beide als zeer belangrijk worden beschouwd. Hoewel dit onderzoek beslist te kleinschalig is om verstrekkende conclusies aan te verbinden, lijkt het er dus op dat wiskundedocenten zowel basisvaardigheden als toepassingen beschouwen als kernonderdelen van het onderbouwprogramma en daarmee als aspecten waarover een tussentijdse toets hen verder zou kunnen informeren.

Over de auteurs

Femke Veldhoen is bachelorstudent wiskunde en toepassingen bij de Universiteit Utrecht. Paul Drijvers is hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij het Freudenthal Instituut en toetsdeskundige bij Cito.
E-mailadressen: *f.veldhoen@students.uu.nl*, *p.drijvers@uu.nl*

RECTIFICATIE

Bij het examenartikel van het Cito in *Euclides* nummer 1 zijn helaas de drie genoemde tabellen verkeerd genummerd. Tabel 1 had moeten zijn tabel 3, tabel 2 was tabel 1 en tabel 3 was tabel 2. Met excuses voor het ongemak.

ONMIDDELLIJKE DIAGNOSE EN FEEDBACK

IN DE WISKUNDELES

Ed van den Berg
Willem Hoekstra

In een typisch leerproces zijn docenten en leerlingen een paar weken met de stof bezig en dan wordt er getoetst. Onderweg in het leerproces ontdekt de docent foute antwoorden en reageert, maar dat is meestal incidenteel en niet systematisch. De auteurs van dit artikel willen laten zien dat er mogelijkheden zijn om gedurende de les snel typische fouten of misconcepties te detecteren en er onmiddellijk op te reageren.

Bovendien is het als docent heel interessant om dat te doen omdat je zo veel kan leren over begripskronkels van leerlingen. En leerlingen? Die krijgen inzicht in wat ze wel en niet kunnen of begrijpen, en wat ze daaraan kunnen doen. Door een slimme opbouw van oefeningen kunnen ze zelfvertrouwen ontwikkelen dat gestoeld is op wat ze echt kunnen en kennen.

Grafieken

Stel, je wilt als wiskundedocent even snel zien of je leerlingen voldoende begrip hebben van het verband tussen formules en grafieken van bepaalde types continue functies. We beperken ons even tot lineaire functies, maar een soortgelijke les kan gedaan worden met de grafieken van elke standaardfunctie (kwadratisch, goniometrisch, exponentieel, ...).
Je geeft de opdracht: schets een simpel assenstelsel in je schrift en schets de grafiek van $f(x) = x$, gebruik een zelfde indeling op beide assen. Je schetst een voorbeeld-assenstelsel op het bord en loopt dan de klas rond om te controleren dat leerlingen echt bezig zijn en niet tijd verliezen aan bijvoorbeeld het mooi maken van het assenstelsel. Daarnaast kijkt je of er inderdaad een rechte lijn onder 45 graden met de x-as uit komt.
Dan geef je de opdracht: schets nu in dezelfde figuur de grafiek van $f(x) = 2x$, een schets is voldoende, het is niet nodig precies te meten. Je loopt door de klas, bekijkt een tiental antwoorden en ziet in één oogopslag of een steilere of minder steile grafiek getekend wordt vergeleken met $f(x) = x$. Er is zelfs tijd voor korte, individuele interviews met één of twee leerlingen die een afwijkende oplossing hebben. Die interviews kunnen uiterst nuttige informatie opleveren voor een plenaire reactie op leerlingfouten. Je gaat nu direct plenair in op één of twee veelgemaakte fouten. Doe het kort en houd de vaart erin!
De logische opdracht is nu het schetsen van $f(x) = ½x$. Wederom loop je rond, ziet een tiental antwoorden, en reageert plenair. Dan verder met bijvoorbeeld het schetsen van $f(x) = x – 5$ en andere variaties voor zover nodig. Deze herhaling van lineaire grafieken kan afgesloten worden met de algemene vorm $f(x) = ax + b$ en de betekenis van de richtingscoëfficiënt a en het begingetal b.

Als bij de eerste opdrachten blijkt dat vrijwel alle leerlingen het goed doen, dan staakt de docent de oefening en gaat hij/zij meteen over op de activiteit waarin de grafieken gebruikt worden. Aan de andere kant, als er serieuze problemen zijn, doet de docent een stap terug. Even een tabel maken met waarden van x en $f(x)$ en laten zien hoe je van tabel naar grafiek gaat.

x	$f(x) = x$	$f(x) = 2x$	$f(x) = ½x$
1	1		
2	2		
3	3		
4	4		
5	5		

Daarna wat extra opgaven, waarbij de leerlingen dit zelf doen, maar steeds één tegelijk met onmiddellijke plenaire terugkoppeling. De verleiding is groot om de leerling een heel werkblad met alle opgaven tegelijk te geven in plaats van één voor één afgewisseld met plenaire feedback. Doe dit niet. Door die plenaire feedback krijgen leerlingen de kans om de volgende opgave beter te doen en zelfvertrouwen en motivatie te winnen. Ontneem ze die kans niet! Door de snelheid erin te houden kan zo'n activiteit binnen tien à vijftien minuten uitgevoerd worden.

Eigenschappen

Wanneer we het bovenstaande voorbeeld analyseren, zitten er twee essentiële aspecten in het ontwerp en de uitvoer ervan: de afwisseling van oefening en onmiddellijke feedback en het feit dat je als docent tijdens de oefening rondloopt door de klas. Neem niet aan dat je alle leerlingfouten al weet. De korte interviews tijdens de rondgang vormen de ideale voorbereiding op de plenaire uitleg en helpen een klimaat te creëren waarin leerlingen ervaren dat hun docent oprecht geïnteresseerd is in het begrijpen en corrigeren van hun gedachtengangen.
De kracht van de methode ligt dus in de snelle diagnose gecombineerd met onmiddellijke individuele en plenaire feedback. De ijverige docent die 's avonds achter een toren schriften zit om iedere leerling individueel commentaar op huiswerk of een toets te geven, is een paar dagen te laat met de feedback. De leerling kijkt misschien

niet eens naar die rode, half leesbare docentfeedback. Onmiddellijke feedback (ook wel *fast feedback* genoemd) is duidelijk effectiever.
In een bekende studie naar effecten van formatieve toetsing vonden Black en William[1] in Engeland dat de effecten van wel of geen feedback op leerlingenwerk veel groter bleken te zijn dan andere variabelen in het leerproces, zoals de keuze van de lesmethode. Hierbij moet dan wel aan de volgende voorwaarden worden voldaan:

- geen oordeel verbinden aan de feedback;
- onmiddellijke feedback in dezelfde les;
- feedback geven in een begrijpelijke vorm.

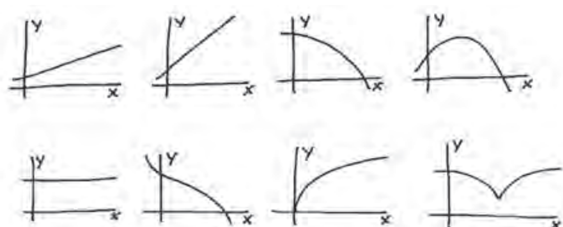
Hattie[2] komt op grond van meta-analyse tot dezelfde conclusie. De methode is afhankelijk van het zeer snel kunnen zien van antwoorden van leerlingen en het al enigszins weten welke fouten je verwacht en daar snel op inspelen. Om het denken van de leerlingen snel zichtbaar te maken, zijn er in de wiskunde veel snelle *formats* te bedenken in de vorm van grafieken, diagrammen, schetsen en korte antwoorden. We geven een aantal voorbeelden.

Nagaan of uitleg is overgekomen

In plaats van een hele serie vragen te stellen, zoals hierboven beschreven, kun je de methode ook inzetten om met een enkele vraag (*concept check*) na te gaan of je uitleg is overgekomen, Bijvoorbeeld, nadat je aan de hand van dalparabolen hebt uitgelegd wat de relatie is tussen de waarde van de discriminant van de vergelijking $f(x) = 0$ en de ligging van de grafiek van f ten opzichte van de x-as, vraag je aan leerlingen om de globale grafiek van een bergparabool te tekenen voor de drie situaties: $D < 0$, $D = 0$ en $D > 0$.

Hellingsgrafieken

Om het begrip van het verband tussen de grafiek van een functie en die van de bijbehorende hellingsfunctie (verder) te ontwikkelen, schets je grafieken van functies op het bord, zie figuur 1 en vraag je de leerling de grafiek van de hellingsfunctie te schetsen. De elementen die in de voorbeelden terug kunnen komen zijn, afhankelijk van het niveau en de plaats in het leerproces: lineair stijgend, lineair stijgend maar steiler (of minder steil), lineair dalend, toenemend/afnemend stijgend/dalend, overgangen tussen stijgen en dalen, grafiek van constante functies (lastig!), buigpunten, verticale raaklijnen, knikken in de grafiek. Daarnaast is het natuurlijk ook mogelijk om de vragen om te keren: de hellingsgrafiek geven en dan vragen naar een schets van de grafiek van de oorspronkelijke functie. De



figuur 1



figuur 2 Een klas met 64 leerlingen in de Filippijnen. Hoe kun je in zo'n klas toch enigszins reageren op individuele fouten en denkbeelden? Met de fast feedback-methode.

methode kan ook ingezet worden voor het activeren van voorkennis. Leerlingen aan de hand van de globale grafiek van een logaritmische functie een globale hellingsgrafiek laten tekenen, geeft ze een eerste aanzet om in te zien dat de afgeleide van de orde $1/x$ is. Hoewel dit op het eerste gezicht een vrij eenvoudige opgave lijkt, werd uit de manier waarop leerlingen hun schetsten maakten en voortdurend corrigeerden zichtbaar hoe hard ze aan het denken waren en bezig waren het begrip hellingsfunctie voor zichzelf opnieuw te construeren. Met name het gedrag van de grafiek voor groter wordende waarden van x leverden de nodige hoofdbrekens op: de grafiek van de gewone functie heeft geen horizontale asymptoot, maar de hellingen gaan wel naar 0. Dit zijn dan de punten waar je in de plenaire terugkoppeling aandacht aan besteedt.

Meetkunde

De methode kan ook worden gebruikt om het begrip van karakteristieke eigenschappen van bijvoorbeeld vierhoeken te ontwikkelen. Teken achtereenvolgens verschillende soorten vierhoeken (rechthoek, ruit, parallellogram, ...) met hun diagonalen op het bord en vraag leerlingen lijnstukken aan te geven die evenwijdig zijn of even lang of loodrecht op elkaar staan. Andersom kan ook weer: vraag leerlingen een vierhoek te tekenen die aan bepaalde eigenschappen voldoet.

Visualisaties

Essentieel bij de *fast feedback*-methode is het vinden van handige visualisaties die het denken van leerlingen in een oogopslag zichtbaar maken. Ter inspiratie nog een lijstje van mogelijke visualisaties:

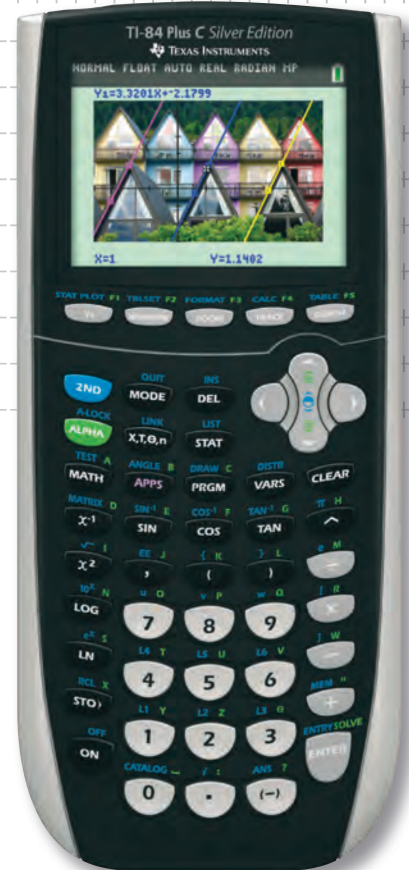
- fouten opsporen en laten aanstrepen in een stapsgewijze afleiding of bewijs;
- laten sorteren van voorbeelden in een tabel of Venn-diagram;
- boomdiagrammen laten tekenen bij kansproblemen;
- grafieken laten schetsen van verdelingskrommen van een kansverdeling om te kijken naar het begrip van verschillende centrummaten (teken een verdeling waar de mediaan links van het gemiddelde zit) of het effect van een grotere of kleinere spreiding of steekproefomvang (wortel n-wet);

De nieuwe TI-84 Plus-C *silver edition*

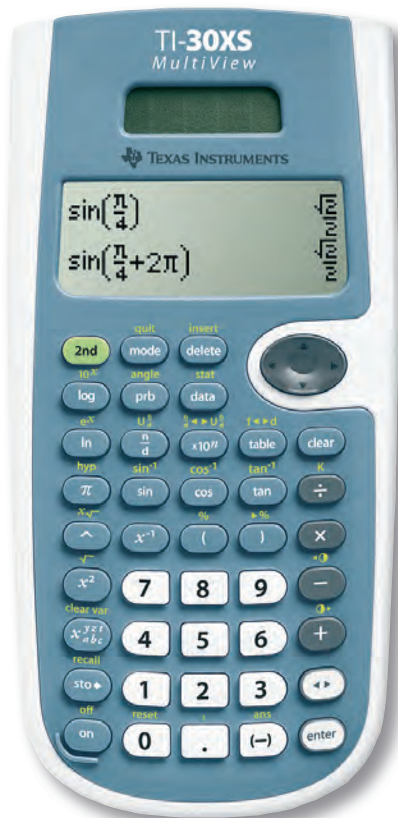
Is nu beschikbaar, bestel 'm!

- Met backlight kleurenscherm, oplaadbare batterij en lader
- Met Examenstand/Geheugen-blokkering
- Ook weer met TI-SmartView, maar nu met kleur!
- Gratis upgrade uw huidige zwart-wit SmartView naar kleur

Zeer aantrekkelijke lerarenaanbieding
voor € 69,-. Met gratis TI-SmartView software voor beamer of digibord.



Goedgekeurde grafische rekenmachines voor het Centraal Eindexamen havo/vwo:
- TI-83 Plus en TI-84 Plus
- TI-84 Plus C Silver Edition
- TI-Nspire CX



Nieuw! Nu ook lerarenaanbieding voor de wetenschappelijke rekenmachine TI-30XS MultiView.

Machine + SmartView software voor projectie met beamer of digibord voor slechts € 20,-

> Mail voor aanbiedingsformulieren en/of meer informatie naar ti-cares@ti.com

> Kijk ook op www.edcuation.ti.com/nederland

Texas Instruments

www.education.ti.com/nederland

– pijlenkettingen laten maken bij volgorde van bewerkingen in functies of bij inzicht verwerven in kettingfuncties.

Samenvattend

Docentfeedback op leerlingenwerk (zonder cijfers te geven) is een van de krachtigste invloeden op het leren van leerlingen. Hoe sneller de feedback, hoe beter. Dit artikel illustreerde een aantal manieren om zeer snel ideeën van veel leerlingen te diagnosticeren en erop te reageren. De snelle feedback werkt naar twee kanten. De docent kan zeer snel reageren op leerlingenwerk: de leerling krijgt snel feedback van de docent. De docent kan ook heel snel uitvinden hoe de les overkomt! De gebruikte methode stimuleert ook om leerlingen antwoorden te laten vergelijken en aan elkaar uit te leggen (*peer teaching* [3]). De docent doet hierbij veel kennis op over veelvoorkomende fouten van leerlingen, dat is interessant en nuttig!

Noten

[1] Black, P., & William, D. (1998). Assessment and Classroom Learning. *Assessment in Education*, *5*(1).
[2] Hattie, J. (2009). *Visible Learning*. Taylor & Francis.
[3] Mazur, E. (1997). *Peer Teaching*. New York, Wiley.

Over de auteurs

Ed van den Berg is vakdidacticus natuurkunde VU en lector Natuur- en Technieknonderwijs bij de Hogeschool van Amsterdam en ontwikkelde diagnostische toetsing voor gebruik in grote klassen (40–70 leerlingen) in de Filippijnen. Willem Hoekstra is vakdidacticus wiskunde VU en docent wiskunde aan het IJburg College in Amsterdam.
E-mailadressen: *e.berg@vu.nl*, *w.s.hoekstra@vu.nl*



MEDEDELING



AANKONDIGING WINTERSYMPOSIUM KWG 2015 DATAVERWERKING EN STATISTIEK

Zaterdag, 10 januari 2015, Utrecht
Tijd: 11.00–16.00

Het Wintersymposium 2015 van het Koninklijk Wiskundig Genootschap heeft deze keer een thema uit het nieuwe examenprogramma voor havo en vwo: **dataverwerking en statistiek**, het omgaan met grote hoeveelheden data. Vier onderzoekers uit verschillende vakgebieden laten u iets zien van hun onderzoeksgebied en de rol van dataverwerking daarin.

Sprekers

– Fetsje Bijma (VU) zal de inhoudelijke inleiding *Een frisse blik op statistiek* verzorgen, waarin begrippen als kansverdeling, toetsen, p-waarden en power aan bod komen. De inleiding wordt geïllustreerd met MRI-data van het brein.

Na deze inleiding zullen drie wetenschappers van verschillende instituten een specifiek onderwerp bespreken.

– Maurice Schmeits (KNMI) spreekt over *Kansverwachtingen in de meteorologie*. Hij besteedt speciaal aandacht aan een kansverwachtingssysteem voor (zwaar) onweer, denk aan code geel, oranje of rood.
– Marjan Sjerps (NFI, UvA) gaat het hebben over *Hoe sterk is het bewijs?* Deze keer gaat het niet over het P = NP probleem, het vermoeden van Goldbach of andere beroemde onopgeloste wiskundige vraagstukken, maar over forensische statistiek. Een populair onderwerp voor leerlingen en uiterst actueel.
– Wouter Verkerke (NIKHEF) heeft als onderwerp *De ontdekking van het Higgs-deeltje.* Hij gaat in op de statistische en data-analysetechnieken die gebruikt zijn om het Higgs-deeltje te vinden. De vondst van dit Higgs-deeltje, door experimenten bij CERN in 2012, werd in 2013 beloond met een Nobelprijs.

Een rijk programma dat veel kanten van dit onderwerp belicht. Wiskunde is overal: ook voor uw collega's natuurkunde, NLT, biologie en scheikunde is dit symposium interessant. Zegt het voort!

Datum, plaats, bijdrage

Het symposium wordt gehouden op **zaterdag 10 januari 2015** in het Academiegebouw van de Universiteit Utrecht (Domplein 29, 3512 JE Utrecht).Het programma start om **11:00 uur** (koffie vanaf 10:30) en eindigt ca. 16:00 uur. Graag aanmelding vooraf, bij voorkeur voor 29 december, via de website van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, *www.wiskgenoot.nl* (kies dan 'wat doet het KWG' → en vervolgens 'congressen en symposia'). Daar is ook het volledige programma, inclusief samenvattingen van de lezingen, te vinden. De kosten voor deelname aan het symposium bedragen bij betaling voor 29 december 2014 voor KWG-leden € 30,00, voor niet-leden € 35,00 en voor leerlingen, studenten en standhouders € 15,00 (een deel van de kosten voor lunch). Deze bijdrage is inclusief lunch en consumpties gedurende de dag. Bij betaling na 29 december worden de deelnamekosten met € 5,00 verhoogd. Nadere inlichtingen: Jenneke Krüger, e-mailadres: *jenneke.kruger@gmail.com*, telefoon: 06-16420445.

VANUIT DE OUDE DOOS

Ton Lecluse

In deze rubriek bespreekt Ton Lecluse opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Hij beperkt zich tot opgaven die, naar zijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Eventueel met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!



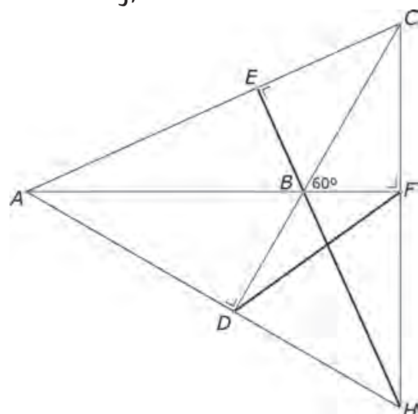
De opgave is deze keer een mooi dwarsverband tussen algebra (letterrekenen), analyse (functieonderzoek) en meetkunde (de halve gelijkzijdige driehoek). Met enige sturing kan elke leerling deze maken. Wellicht vindt u het leuk om de opgave eerst zelf te proberen. Verderop treft u mijn uitwerking aan.

Opgave

De driehoek *ABC* is stomphoekig in *B*; de hoogtelijnen zijn *AD, BE* en *CF*; het hoogtepunt is *H*. Voor het geval $\angle B = 120°$, de uiterste waarden van het quotiënt $\frac{DF}{HE}$ te bepalen.

Wellicht is de vraag niet helemaal correct, gezien het antwoord (verderop). In moderne terminologie: bepaal het bereik van het quotiënt $\frac{DF}{HE}$.

uitwerking, een werkschets



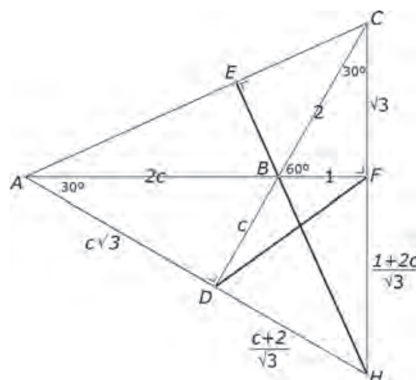
Wilt u het zelf eerst eens verder proberen?

Een eerste inventarisatie

- er zijn diverse 30° – 60° – 90° driehoeken aanwezig;
- stel $BF = 1$ en $AB = 2c$ (waarbij we *c* gaan variëren);
- druk lijnstukken uit in *c*.

Nu in meer detail

De vier aanwezige 30° – 60° – 90° driehoeken leveren op:



De stelling van Pythagoras in driehoek *AFC* geeft

(1)... $AC = 2\sqrt{c^2 + c + 1}$

Verder lezen we af:

(2)... $AH = c\sqrt{3} + \frac{c+2}{\sqrt{3}} = \frac{4c+2}{\sqrt{3}}$

(3)... $CD = c + 2$

Door de oppervlakte van driehoek *ABC* op twee manieren uit te rekenen, krijgen we $\frac{1}{2} \cdot EH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CD$

zodat $EH = \frac{AH \cdot CD}{AC}$

Invullen van (1), (2) en (3) geeft

(4)... $EH = \frac{(1+2c)(2+c)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{c^2 + c + 1}}$

De cosinusregel geeft in driehoek *BDF*:

$DF^2 = BD^2 + BF^2 - 2 \cdot BD \cdot BF \cdot \cos 120°$ waaruit volgt

(5)... $DF = \sqrt{c^2 + c + 1}$

($DF = \frac{1}{2}AC$ kun je ook zien met de gelijkvormige driehoeken *ACH* en *FDH*, waarin de andere zijden zich verhouden als 1 : 2)

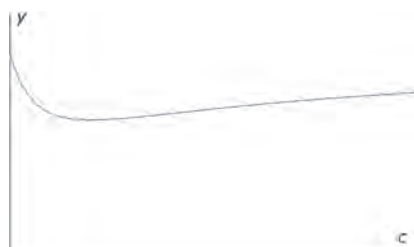
Uit (4) en (5) volgt dan: $\frac{DF}{HE} = \sqrt{3} \cdot \frac{c^2 + c + 1}{(1 + 2c)(2 + c)}$

Gevraagd wordt dus het bereik van de functie

$f(c) = \frac{c^2 + c + 1}{(1 + 2c)(2 + c)}$ te bepalen, waarbij $c > 0$, immers c is de lengte van lijnstuk *BD*.

U gaat wel even na dat: $f\,'(c) = \frac{3c^2 - 3}{(1 + 2c)^2(2 + c)^2}$.

De positieve oplossing van $f'(c) = 0$ is $c = 1$ en $f(1) = \frac{1}{3}$.
De grafiek van de functie *f*:

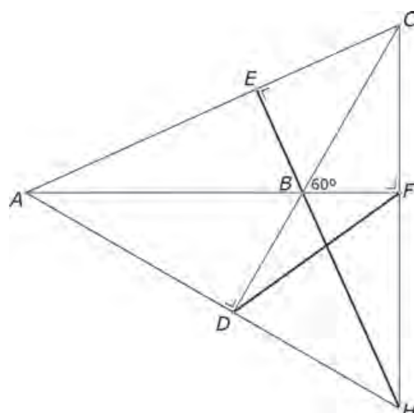


De horizontale asymptoot is $y = \frac{1}{2}$ en $f(0) = \frac{1}{2}$, zodat

$\frac{1}{3} \leq f(c) < \frac{1}{2}$, dus $\frac{1}{3}\sqrt{3} \leq \frac{DF}{HE} < \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Wellicht kan de opgave prima in een huidig leerboek worden geplaatst. Wanneer u enige sturing voor de leerlingen wilt aanbrengen, zou dat als volgt kunnen:

Opgave: hoogtelijnen in een stomphoekige driehoek
Van de driehoek *ABC* is $\angle B = 120°$. De hoogtelijnen zijn *AD*, *BE* en *CF*. Het hoogtepunt is *H*.
Zie de figuur hieronder.



Een aantal hoeken in deze figuur is bekend.
a. Schrijf de hoekgrootte in de betreffende hoeken.

Stel $BF = 1$ en $BD = c$.
Van een aantal lijnstukken is de lengte uit te drukken in c.
b. Schrijf de lengtes bij deze lijnstukken.

Er geldt: $\frac{DF}{HE} = \sqrt{3} \cdot \frac{c^2 + c + 1}{(1 + 2c)(2 + c)} = f(c)$

c. Bewijs dat deze formule klopt.

d. Welke waarden kan $\frac{DF}{HE}$ aannemen?

(Eventueel kan voor vraag c als hulpvraag worden gesteld:

Toon aan dat $DF = \sqrt{c^2 + c + 1}$)

Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G., & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958)*. Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

WERELD WISKUNDE FONDS

AMOS OP WEG NAAR ZIJN BEVOEGDHEID

In 2013/2014 hielp het Wereld Wiskunde Fonds een student in Kenia zijn opleiding tot wiskundeleraar te voltooien. Op *www.nvvw.nl/17826/* vindt u een verslag van de student zelf en Betty Straatman, de contactpersoon bij dit project, geeft uitleg over het onderwijssysteem in Kenia.

GETUIGEN

THEO THIJSSEN

Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.





figuur 1 Theo Thijssen (1879-1943) als jong onderwijzer circa 1902; copyright Theo Thijssenmuseum

In de loop van de eeuwen zijn er talloze reken- en wiskundeboeken geschreven. De meeste daarvan zijn tamelijk fantasieloos, maar sommige zijn bijzonder. Het vierdelige *Sommenboek voor de volksschool*, verschenen tussen 1912 en 1914, was zowel fantasieloos áls bijzonder. Qua inhoud zou je het boekje zo terzijde leggen, maar het is bijzonder vanwege de auteur. Het is namelijk geschreven door Theo Thijssen (1879-1943).

Van 1898 tot 1921 stond Thijssen aan een Amsterdamse lagere school en schreef toen onder andere dat sommenboek. De meesten zullen hem echter kennen van zijn gedeeltelijk autobiografische romans, zoals *Kees de Jongen* (in 2003 nog verfilmd), of van zijn tijd als politicus. Het vierdelige *Sommenboek voor de volksschool* van Thijssen werd de hele periode voor de Tweede Wereldoorlog veel gebruikt op lagere scholen. Dat de auteur zelf van de kweekschool was gekomen met een vijf voor rekenen was niet zo bekend.

Thijssen was een sociaal bewogen onderwijzer. Aan de lagere school leerden indertijd kinderen uit de lagere sociale klassen. Na de lagere school, die niet iedereen afmaakte, ging een leerling naar het beroepsonderwijs of hij ging werken. Als een leerling goed kon leren, dan kon die aan het begin van de twintigste eeuw door de onderwijzer worden aangemeld voor de HBS. In Amsterdam mocht elke lagere school een paar leerlingen aanmelden die dan met financiële ondersteuning van de gemeente werden geplaatst voor extra taallessen buiten schooltijd. De betreffende leerlingen konden met extra lessen Frans laten zien dat ze tot even veel in staat waren als hun leeftijdgenootjes die op een duurdere school zaten. Aan de onderwijzer de taak om te beslissen welke leerling uit zijn klas mocht gaan. Thijssen schetste het morele dilemma dat deze gang van zaken opleverde in *De gelukkige klas*, waar de docent door het hoofd van de school werd gemaand om vooral niet teveel leerlingen op te geven, want dan volgde extra inspectiecontrole. De docent gunt het echter bijna al zijn leerlingen om de extra taallessen te volgen.

Die inspectie was juist, in de geest van de tijd, bezig om scholen op basis van cijfers en via procedures te controleren. Dat ging onder andere op basis van rapportcijfers en met behulp van registers. Het register was een schrift waarin de onderwijzer geacht werd een logboek bij te houden van hetgeen hij in de klas had behandeld. De ik-figuur (een onderwijzer) in *De gelukkige klas* ergerde zich bijvoorbeeld aan de droogheid van ‘het register’:

> Vanmorgen heb ik het in m’n register aangetekend: ‘Tiend. br. Schrijfwijze. Opt. Aftr.’
>
> Maar wie deze dooie aantekening leest, kan begrijpen, wat het deze week voor ons geweest is? Tot Leentje Roos toe is er een half hoofd groter door geworden. Ze is er heilig van overtuigd: er bestaat in het hele leven maar één domheid: dat is, de komma’s niet ‘recht onder elkaar’ te zetten. En aangezien Leentje Roos zich voor deze domheid sinds Donderdagochtend veilig weet, kan het leven voor haar geen zwarigheden meer brengen.

In *Schoolland* was Thijssen op dreef als rekendocent. Enthousiast (en gender) beschreef hij de wederwaardigheden met zijn klas tijdens een aantal lessen:

Vanmiddag voor de tweede keer deelsommen met nulletjes laten maken. Kon ik mooi met een 'n halve klas doen, want er was gymnastiek. Ieder kind op een bank apart, afkijken onmogelik, 't was heerlik gewichtig.

Daareven heb ik de papiertjes nagekeken ... en ik heb lol gehad, echt schik. Meer dan de helft van m'n klas heeft alle tien de sommetjes goed, minder dan zes goed heeft er geen één. Dat zal me morgen een victorie zijn, als ik de papiertjes terug geef, en dan de behaalde cijfers ga optekenen in het dikke boek. Tien -- tien -- tien zullen de jongensstemmen daveren door de klas. 't Is opvallend, bij de jongens zitten de meeste tientjes...
Volgende week, dan introduceer ik de klassieke

'vorm'-som: $\frac{638 \times 425}{1595}$ en dan is werkelik voor mijn

gevoel m'n klas niet meer 'n kleine-kinderen-klas. 't Schiet toch gáuw op, als ik me herinner dat een klein jaar geleden deze kinderen met de juffrouw nog aan de getalletjes onder de honderd waren. En nu al andere week die klassieke kánjers...

Het waren deze 'klassieke kanjers' en andersoortige sommen waar het *Sommenboek voor de volksschool* vol mee stond. Uit de vier deeltjes met ieder veertig pagina's (vrijwel identieke, iets in lastigheid oplopende) sommen blijkt niks van de passie voor het rekenonderwijs die van de bovenstaande citaten afspat. Thijssen schreef in de prospectus die het *Sommenboek* begeleidde dat hij een 'dienend' rekenboek had willen schrijven. Hij zag een voordeel in de sommenboeken, omdat de serie opgaven met antwoorden de onderwijzer tijd opleverde om de fouten met leerlingen te bespreken.


PRESENT-EXEMPLAAR

SOMMENBOEK
VOOR DE VOLKSSCHOOL

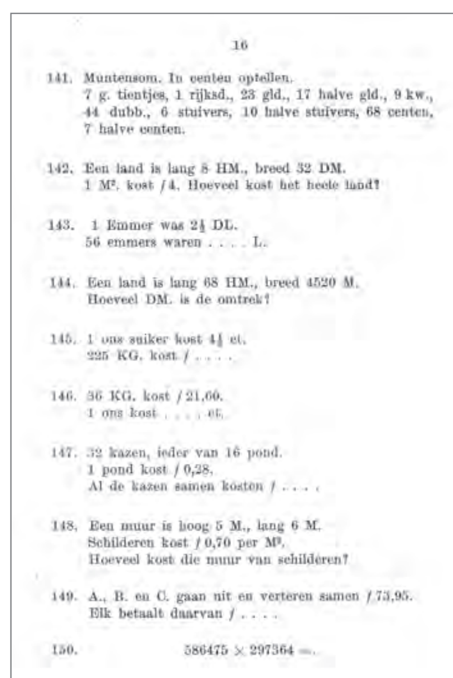
TH. J. THIJSSEN,

EERSTE STUKJE

1912.
UITGAVE VAN C. A. J. VAN DISHOECK TE BUSSUM.

figuur 2 Thijssen, *Sommenboek* (1912)

Het *Sommenboek* was een van de meer populaire boeken van dit soort. Er verschenen edities tot in de jaren veertig. In de jaren vijftig werd er met enig dedain neergekeken op het rekenonderwijs uit die periode, en vandaar dat, onder verwijzing naar dit soort boeken, wel werd gesuggereerd


16

141. Muntensom. In centen optellen.
7 g. tientjes, 1 rijksd., 23 gld., 17 halve gld., 9 kw., 44 dubb., 6 stuivers, 10 halve stuivers, 68 centen, 7 halve centen.

142. Een land is lang 8 HM., breed 32 DM.
1 M². kost / 4. Hoeveel kost het heele land?

143. 1 Emmer was 2½ DL.
56 emmers waren . . . . L.

144. Een land is lang 68 HM., breed 4520 M.
Hoeveel DM. is de omtrek?

145. 1 ons suiker kost 4½ ct.
225 KG. kost / . . . .

146. 36 KG. kost / 21,60.
1 ons kost . . . . ct.

147. 32 kazen, ieder van 16 pond.
1 pond kost / 0,28.
Al de kazen samen kosten / . . . .

148. Een muur is hoog 5 M., lang 6 M.
Schilderen kost / 0,70 per M².
Hoeveel kost die muur van schilderen?

149. A., B. en C. gaan uit en verteren samen / 73,95.
Elk betaalt daarvan / . . . .

150. 586475 × 297364 = .

figuur 3 Thijssen, *Sommenboek* (1912), pagina 16

dat er in de periode voor de onderwijsvernieuwingen uitsluitend aan 'mechanisch rekenen' werd gedaan. Toch is die opmerking niet in alle opzichten juist. Wie de moeite neemt om de boeken van Theo Thijssen te lezen, merkt dat hij de algoritmes die hij de kinderen aanleert inderdaad op tamelijk specifieke problemen wil toepassen. De meeste leerlingen zullen niet hebben begrepen *waarom* de algoritmes werkten. Echter, de betekenis van de rekenkundige operaties en de samenhang tussen de algoritmes was de meeste leerlingen wél duidelijk.
Dat valt ook terug te zien in publieksfilms als *Abbott and Costello in the navy* (1941). Daarin liet de populaire Amerikaanse komiek Lou Costello op drie verschillende manieren zien dat 7 keer 13 gelijk was aan 28: door het deelalgoritme verkeerd toe te passen, daarna door het vemenigvuldigingsalgoritme foutief te hanteren en tot slot door ook de herhaalde optelling onjuist uit te voeren (bekijk de scene via: *www.teachertube.com/video/abbott-and-costello-46231*). Een dergelijke scene was natuurlijk helemaal niet leuk wanneer mensen niet begrepen wat hier mis ging, en waarom het op drie verschillende manieren mis ging. Het feit dat zo'n scene in een kassucces voorkwam – en zelfs in verschillende andere producties werd gebruikt – geeft aan dat veel leerlingen echt begrip opdeden in de lessen van meester Thijssen. Dat het begrip op een ander niveau lag dan rekendidactici later waardeerden, is iets anders.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

PATROON HERKENNEN – DOEN UW LEERLINGEN HET AL?

NIEUW OEFENMATERIAAL VOOR DE WISKUNDE OLYMPIADE

Birgit van Dalen
Quintijn Puite

Eind januari vindt de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade plaats. Voor alle wedstrijdleiders die graag hun leerlingen willen voorbereiden op deze wedstrijd is er nu het boek *Successtrategieën voor de Wiskunde Olympiade*. In dit artikel komen de auteurs aan het woord.



Alle leerlingen met interesse voor wiskunde uit klas 1 tot en met 5 kunnen meedoen aan de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade. In principe is er buiten onderbouwstof geen voorkennis nodig en kan iedereen zo aan de slag met de puzzelachtige opgaven. Maar de echte *die-hards* willen natuurlijk van tevoren oefenen om zo hoog mogelijke ogen te gooien en komen u als docent om oefenmateriaal vragen. Met het nieuwe boek *Successtrategieën voor de Wiskunde Olympiade* kunt u aan deze behoefte voldoen.



In het boek vindt u geen abstracte theorie, maar concrete strategieën die een leerling op weg kunnen helpen bij Olympiadeopgaven. Elke strategie wordt kort uitgelegd en toegelicht met een voorbeeld. Leerlingen kunnen dit zelfstandig bestuderen en daarna meteen aan de slag met de bijbehorende opgaven, die uit recente olympiaderondes komen. Van elke opgave is achterin het boek een uitwerking beschikbaar.
Strategieën die de revue passeren, zijn bijvoorbeeld Patroon herkennen, Plakken en knippen, Durf te proberen en Goochelen met algebra. Zo wordt bij Patroon herkennen uitgelegd dat het vaak handig is om klein te beginnen en te proberen om voor die kleine waarden een patroon te zien dat je voort kunt zetten. We lichten dit toe aan de hand van een opgave uit de eerste ronde van 2011:

Het getal $a = 111...111$ bestaat uit precies 2011 enen. Wat is de rest bij deling van a door 37?

Een getal met 2011 enen gaan delen, is natuurlijk onbegonnen werk. Maar de getallen 1, 11, 111, 1111, 11111 kun je prima door 37 delen. Laat dat nu al voldoende zijn om het patroon in de resten te vinden. Nadat de leerlingen dit hebben gezien, zijn ze vast beter in staat om de laatste vier cijfers van 5^{2013} te bepalen, wat de eerste opgave bij dit hoofdstuk is (uit de eerste ronde van 2013). De opgaven lopen op in moeilijkheidsgraad; de laatste is een C-opgave uit een tweede ronde. Het trainingsmateriaal is hiermee ook geschikt om te oefenen voor de tweede ronde.
Elke docent die in 2014 de eerste ronde bij hem of haar op school heeft georganiseerd, heeft begin dit schooljaar een aantal exemplaren van het nieuwe boek ontvangen. Heeft u het boek nog niet gekregen? Op de NVvW-dag op 8 november vindt iedere deelnemer in zijn congrestas een tegoedbon voor drie exemplaren, op te halen bij de stand van de Wiskunde Olympiade. En mocht u dat ook nog missen, dan kunt u in november en december het boek nog aanvragen via onze website. Het maken en verspreiden van het boek is mogelijk gemaakt door een subsidie van het ministerie van OCW.
De eerste ronde vindt dit schooljaar plaats in de periode van 19 tot en met 29 januari 2015. Alle scholen in Nederland kunnen hier kosteloos aan meedoen. Kies zelf een geschikte dag binnen deze periode, zet 'm op school in de agenda en geef uw school op via onze website!

Link: *www.wiskundeolympiade.nl*
E-mail: *info@wiskundeolympiade.nl*

Over de auteurs

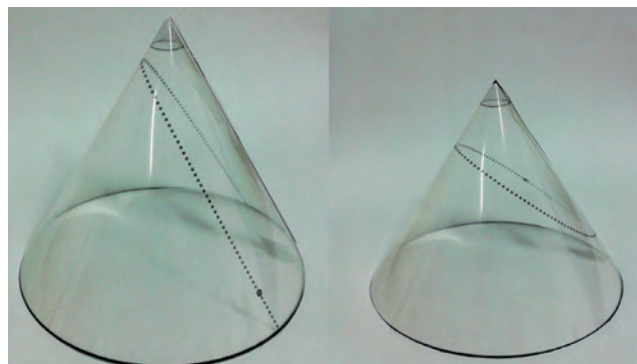
Birgit van Dalen en Quintijn Puite zijn (samen met Melanie Steentjes) verantwoordelijk voor de dagelijkse gang van zaken bij de Nederlandse Wiskunde Olympiade, vanuit respectievelijk de Universiteit Leiden en de Technische Universiteit Eindhoven. Daarnaast is Birgit docent wiskunde op het Aloysius College in Den Haag en adjunct-hoofdredacteur van *Euclides*. Quintijn is verder docent op de lerarenopleiding wiskunde van Hogeschool Utrecht. E-mailadressen: *birgit@wiskundeolympiade.nl*, *quintijn@wiskundeolympiade.nl*

KEGELSNEDEN OP ECHTE KEGELS...

VOOR EEN PAAR EUROCENTEN

Fred Muijrers

In dit artikel laat Fred Muijrers ons zien hoe je in *GeoGebra* een bouwplaat maakt voor het bestuderen van een kegelsnede.



figuur 1

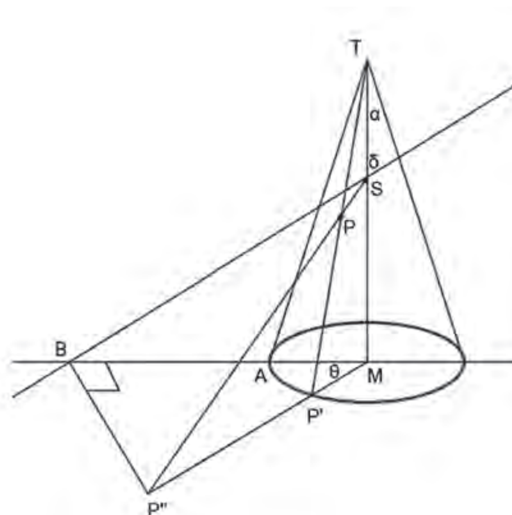
Bij meetkundelessen over kegelsneden laten we als voorbeeld graag ellipsen of parabolen op een echte kegel zien of gebruiken we plaatjes van het internet.[1]
In museum Boerhaave zijn bijvoorbeeld mooie houten exemplaren van kegels te zien en deze kegels zijn uit elkaar te halen zodat de kegelsneden goed zichtbaar worden.[2] 3D-objecten zijn echter duur maar wel overtuigend, en plaatjes blijven 2D-plaatjes. Een collega heeft ooit modellen van gips gemaakt. Zeer mooi, maar erg kwetsbaar. De ambitie is nu met eenvoudige en goedkope middelen 3D-modellen te maken waarin de kegelsneden goed te zien zijn. Je draait en 'ziet' de kegelsnede en het vlak waarin die ligt. De zoektocht heeft geleid tot bouwplaten van kegels met behulp van cirkelsectoren waarop een kromme wordt getekend in *GeoGebra*. Printen op transparant papier, vouwen en de kromme wordt een kegelsnede, zie figuur 1. Er zullen verschillende manieren zijn om dit aan te pakken; wij maken gebruik van een stelling van Menelaos van Alexandrië (70–130, Egypte).[3]

Rekenwerk aan de kegel

Een kegel wordt gedefinieerd als een lijnenwaaier in een punt T (de top), waarbij één lijn door T als as fungeert en waarmee de overige lijnen allemaal een vaste hoek (α) maken Voor ons model en analyse gebruiken we lijnstukken van een gegeven vaste lengte (k) die vanuit T, uitgezet onder hoek α met de as, de kegelmantel beschrijven. Er ontstaat een grondcirkel met middelpunt M, zie figuur 2. Aan de hand van de figuur is de analyse te doen. Een vlak snijdt as TM in punt S, gelegen tussen T en M, onder een hoek δ. De mogelijkheden zijn bekend:

- als $0° < \delta < \alpha$ dan is de kegelsnede een hyperbool: in ons voorbeeld ontstaat een deel van één tak;
- als $\delta = \alpha$ dan ontstaat een parabool: in ons voorbeeld ontstaat een deel daarvan;
- als $\alpha < \delta \leq 90°$ dan ontstaat een ellips ($\delta = 90°$ levert een cirkel).

P is een punt op de kegelsnede waarbij om M over hoek θ is gedraaid. Het doel is nu lengte TP te vinden als functie van die hoek θ. Met deze hoek ligt verder ook in de uitslag, de bouwplaat van de kegel, hoek ATP vast. Kijk nu naar de driehoek MTP' met transversaal SPP''. Nu is de stelling van Menelaos goed te gebruiken en na enig rekenwerk vinden we $|TP|$, zie kader. Een mooie formule, die nog wel wat te vereenvoudigen is, maar hoe tekenen we hiermee de punten P op een uitslag?



figuur 2

De kegelsnede op de uitslag

De hoek ATP (= φ) op de uitslag is als volgt gerelateerd aan θ: $\varphi \cdot k = \theta \cdot |MA| = \theta \cdot k \cdot \sin(\alpha)$. Dit is namelijk de lengte van een cirkelboog bij een gegeven straal en gegeven hoek. De cirkelsector, waarmee de kegel te maken is, heeft een bepaalde hoek β. Door éénmaal om M te draaien ofwel $\theta = 360°$ te nemen, vinden we deze hoek. Er geldt: $\beta = 360° \cdot \sin(\alpha)$. Dit is allemaal eenvoudig na te gaan.
In *GeoGebra* kan nu met de optie *ToPolar* punt P geplot worden met poolcoördinaten ($|TP|$, φ). Eerst wordt β

NIEUW

Math Plus

Tijd voor een nieuwe wiskundemethode

MathPlus maakt wiskunde aantrekkelijker
en uitdagender voor alle leerlingen.



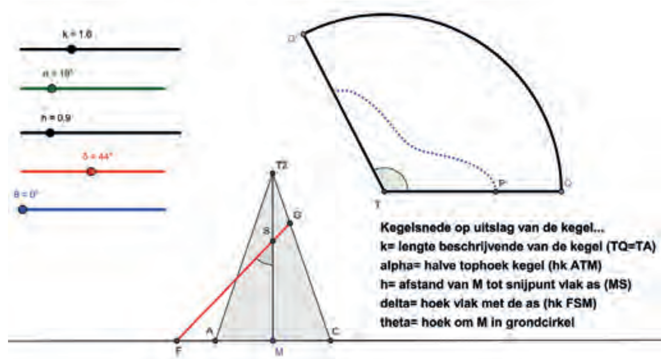
Ontdek de voordelen

- Makkelijker inspelen op niveauverschillen tussen leerlingen
- Direct inzicht in resultaten bij docent en leerling zelf
- Interactieve en levendige leerstof
- De methode die altijd aansluit, tegen een aantrekkelijke prijs

Maak kennis met MathPlus op www.mathplus.nl en meld u aan voor een demonstratie.



MALMBERG



figuur 3

berekend en de cirkelsector getekend nadat α, k, δ en h zijn ingesteld. En dan wordt P getekend met φ en $|TP|$ als functies van θ. Daarbij loopt θ van 0° tot 360°, zie figuur 3.

In de afdruk uit *GeoGebra* geldt: $\alpha = 20°$; $\delta = 40°$.
Er zal een ellips ontstaan. Knip maar uit en vouw in elkaar. Door andere waarden voor δ te kiezen, kunnen zo voorbeelden voor de andere kegelsneden gemaakt worden. Die laten dan vervolgens geprint op transparant papier een 3D-kegel zien, voor een paar eurocent, zie figuur 1. Wie past een en ander aan voor een model uit een 3D-printer?
Nog te onderzoeken opties zouden kunnen zijn:

— het doorsnijdende vlak is evenwijdig aan de as en gaat niet door de top, $\delta = 0°$ en punt S bestaat niet. Er ontstaat een hyperbool, maar ons model behoeft daarbij aanpassing;
— de kegel 'ontaardt' en T ligt in het 'oneindige'. Er ontstaat een cilinder. In plaats vanuit T te redeneren zou je nu vanuit M en de grondcirkel kunnen redeneren. Doorsneden zijn als randen die ontstaan bij verstekzagen van een buis...

Het script van het *GeoGebra*-bestand is op te vragen bij de auteur. Daar zijn ook verbeteringen, aanpassingen, etcetera welkom.

Noten

[1] Zie bijvoorbeeld *www.pandd.demon.nl/dandelin.htm*
[2] Zie *www.museumboerhaave.nl/collectie/zoeken/?search=kegels*
[3] Zie bijvoorbeeld O. Bottema (2010). *Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde*, Hoofdstuk XIX. Uitgave: Epsilon Utrecht. Op internet staan diverse andere bewijzen. De stelling is iets subtieler dan in dit verhaal.

De stelling van Menelaos zegt:

$$\frac{|TP|}{|PP'|}\cdot\frac{|P'P''|}{|MP''|}\cdot\frac{|MS|}{|ST|} = 1$$

Noem $|MS| = h$.
$|ST| = |TM| - |MS|$ met $|TM| = k\cos(\alpha)$
$|PP'| = k - |TP|$
$|MP''| = |BM| / \cos(\theta)$ met $|BM| = h{\cdot}\tan(\delta)$
$|P'P''| = |P''M| - |P'M|$ met $|P'M| = k.\sin(\alpha)$
Invullen geeft:

$$|TP| = \frac{\sin(\delta)\cdot(k\cdot\cos(\alpha) - h)}{\cos(\alpha)\cdot\sin(\delta) - \sin(\alpha)\cdot\cos(\delta)\cdot\cos(\theta)}$$

Een kleine controle. Voor $\delta = 90°$ krijgen we

$|TP| = \dfrac{(k\cdot\cos(\alpha) - h)}{\cos(\alpha)}$. Nu is $|TP|$ onafhankelijk van θ en 'dus' constant bij rondgaan om M. P ligt op vaste afstand van T. Op de kegel ontstaat een cirkel.

Over de auteur

Fred Muijrers is docent aan de lerarenopleiding wiskunde van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen. Ook is hij coördinator van de eerstegraadsopleiding wiskunde bij de HAN masterprogramma's.
E-mailadres: *fred.muijrers@han.nl*

WEBSITE

BRONNENOVERZICHT WISKUNDE

Dit overzicht is voortgekomen uit een afstudeer-onderzoek naar de vraag 'Welke vakdidactische bronnen kunnen wiskundedocenten uit het voortgezet onderwijs in Nederland gebruiken om hun wiskunde-didactiek zelfstandig te verbeteren?'. Doel van het onderzoek was om tot een zo compleet mogelijk overzicht te komen wat betreft vakdidactische bronnen en strategieën voor het zoeken naar vakdidactische bronnen. In deze handleiding vinden we materiaal voor leerlingen, bronnen die kunnen dienen als inspiratiebron voor jezelf als leraar en andere bronnen die variëren van 'direct inzetbaar' tot en met 'inspiratiebron'. De bronnen in deze handleiding zijn te gebruiken om eigen vakdidactiek zelfstandig te verbeteren - zonder contacturen (zoals bij een ge-organiseerde wiskundedag of observatie bij collega's).

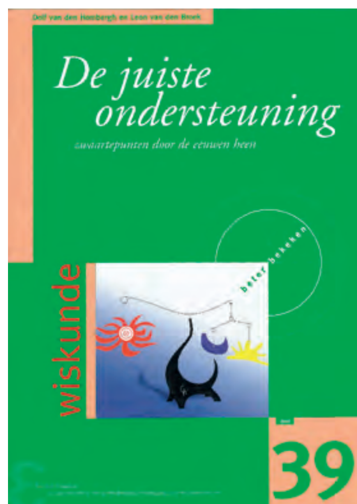
 *vakbladeuclides.nl/902bronnen*

BOEKBESPREKING

DE JUISTE ONDERSTEUNING



Dick Klingens



Ondertitel: Zwaartepunten door de eeuwen heen
Auteurs: Dolf van den Hombergh, Leon van den Broek
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2014), Zebra 39
ISBN: 978-90-5041-141-7
Prijs: € 10,00 (64 pagina's; paperback) in de boekhandel; voor NVvW-leden geldt op bijeenkomsten een gereduceerde prijs

Als eerste

En weer is er een meetkundeboek in de Zebrareeks verschenen. En dat terwijl de meetkunde (anders dan verstopt binnen de analytische) nauwelijks meer aan de orde komt in het komende wiskundecurriculum vwo B. Maar zoals de tekst op de achterkaft al zegt: wiskunde en natuurkunde zijn daarbij eng verweven. Het eerste dat we in het boekje opmerken – Archimedes en Stevin min of meer volgend in hun intuïtief axiomatische benadering – zijn de vijf principes waarop het geheel zal gaan steunen.

Principe 0. Elk voorwerp (ding) heeft één zwaartepunt (massamiddelpunt).
Principe 1. Alle steunlijnen gaan door één punt, het (evenwichts)steunpunt. Omgekeerd is elke lijn door dit punt een steunlijn. Dat is het zwaartepunt.
Principe 2. Als een voorwerp bestaat uit twee stukken met zwaartepunten Z_1 en Z_2, dan ligt het zwaartepunt van het voorwerp op het verbindingslijnstuk van Z_1 en Z_2.
Principe 3. Als de massaverdeling van een voorwerp een symmetrieas heeft, ligt het zwaartepunt op die symmetrieas. Als de massaverdeling van een voorwerp een symmetriepunt heeft, is het zwaartepunt dat symmetriepunt.
Als de massaverdeling van een voorwerp een draaipunt heeft, is het zwaartepunt dat draaipunt.
Principe 4. Als de figuren F_1 en F_2 hetzelfde zwaartepunt hebben en beide worden samengevoegd met een derde figuur F, dan hebben $F + F_1$ en $F + F_2$ hetzelfde zwaartepunt.
Geen van deze principes wordt bewezen. En dat is niet erg, want er volgt nog meer dan genoeg. Trouwens, hóe zou je principe 0, bijvoorbeeld, willen bewijzen?
Overigens, een steunlijn is een lijn 'op' de figuur die in een gedachte-experiment ontstaat, als de figuur 'in evenwicht' geplaatst wordt op een wig.

De hoofdstukken

In hoofdstuk 0 (*Spektakel*) staan alleen drie foto's die elk een situatie met een bijzonder evenwicht weergeven: een op de Rambla zittende en balancerende kunstenaar, een op een kabel rijdende equilibrist en een fles in een flessenhouder; zie figuur 1. Uiteraard speelt in elke situatie de plaats van het zwaartepunt een belangrijke rol.
In hoofdstuk 1 (*Waar zit het zwaartepunt?*) worden bovenstaande principes intuïtief geïntroduceerd en enkele basisconstructies uitgevoerd. Met principe 4 wordt de zogeheten schuifstelling voor puntmassa's bewezen. Ook komt het zwaartepunt van figuren met *alleen* lengte aan de orde. En óók de stelling 'Het zwaartepunt van een lijnstuk is het midden van dat lijnstuk' vinden we erin terug. Dit hoofdstuk telt zeventien redelijk eenvoudige vragen. Wat me daarin stoort, is het gebruik van het werkwoord 'bepalen' als overduidelijk 'construeren' of 'tekenen' bedoeld is – maar hier zal wel gekeken zijn naar (*Werk*)*woorden in de centrale examens*.[1]

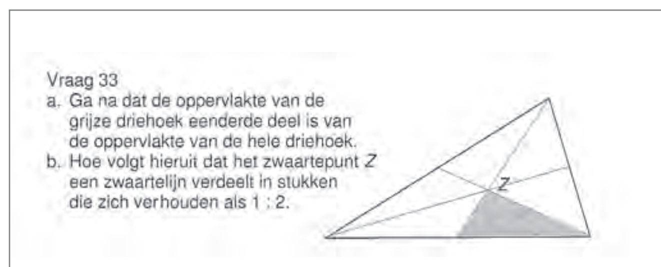


figuur 1

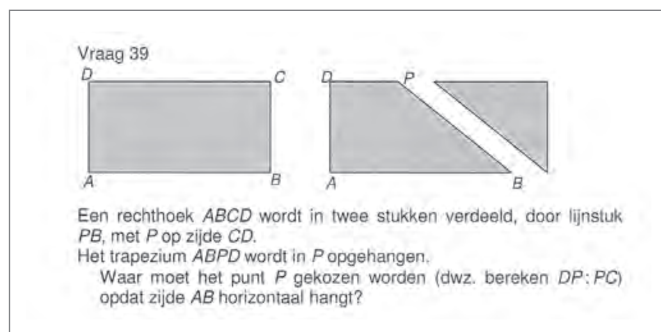
In hoofdstuk 2 (*Het zwaartepunt volgens Simon Stevin*) – de titel zegt het al – komt de werkwijze van Stevin aan de orde: de momentenwet. En daarin wordt met 'de juiste ondersteuning' bedoeld de positie van het zwaartepunt bij een in delen verdeelde balk. Leuk is daarbij de toepassing van de bissectricestelling voor het construeren van het punt van juiste ondersteuning bij puntmassa's van 5 en 6

in de eindpunten van een verder gewichtsloos lijnstuk. In de 13 vraagstukken in dit hoofdstuk worden ook zwaartepunten bij meer dan twee puntmassa's en die van stangenveelhoeken en van L-vormige figuren behandeld.
In hoofdstuk 3 (*Het zwaartepunt van een driehoek*, met elf vragen) staat onder meer het bewijs van Stevin voor het zwaartepunt van een homogene driehoek: *yder driehoucx swaerheydts middelpunt is inde lini ghetrocken vanden houck tot int middel der sijde*. De verhouding van de zwaartelijnstukken wordt onderzocht aan de hand van de (gelijke) oppervlaktes van de zes door de zwaartelijnen bepaalde deeldriehoeken. In vraagstuk 33, onderdeel a (op pagina 32), staat in dit verband een onjuistheid (zie figuur 2): de oppervlakte van de grijze driehoek is eenderde van de oppervlakte van de '*halve*' driehoek. Een leuk vraagstuk in dit hoofdstuk is nummer 39, een probleem van Pappos dat in het werk van Archimedes wordt vermeld; zie figuur 3. Het hoofdstuk wordt afgesloten met het berekenen van het zwaartepunt van een halve cirkelschijf.
De theorie in hoofdstuk 4 (*Het zwaartepunt met vectoren*, met acht vraagstukken) sluit aan bij het komende vwo B-programma: bij de berekeningen wordt gebruikgemaakt van vectoren.
In het op een na laatste vraagstuk moet de stelling van Ceva bewezen worden. Het is lang geleden dat ik die stelling gezien heb in een pas verschenen wiskundeboek. Aan het eind van het hoofdstuk vinden we dan de 'nette' definitie van het zwaartepunt Z van n puntmassa's a_1, a_2, ..., a_n gegeven op de posities A_1, A_2, ..., A_n, bij een vast punt O en met $a = a_1 + a_2 + ...+ a_n$:

$$OZ = \frac{a_1}{a}OA_1 + \frac{a_2}{a}OA_2 + ... + \frac{a_n}{a}OA_n$$


Vraag 33
a. Ga na dat de oppervlakte van de grijze driehoek eenderde deel is van de oppervlakte van de hele driehoek.
b. Hoe volgt hieruit dat het zwaartepunt Z een zwaartelijn verdeelt in stukken die zich verhouden als 1 : 2.

figuur 2


Vraag 39

Een rechthoek $ABCD$ wordt in twee stukken verdeeld, door lijnstuk PB, met P op zijde CD.
Het trapezium $ABPD$ wordt in P opgehangen.
Waar moet het punt P gekozen worden (dwz. bereken $DP : PC$) opdat zijde AB horizontaal hangt?

figuur 3

En daarmee kan dan in hoofdstuk 5 (*Het zwaartepunt van ruimtefiguren*) ook gerekend worden aan zwaartepunten van ruimtefiguren (in acht vragen).
In hoofdstuk 6 (*Werkstukken*) staan twaalf werkstukken, variërend van eenvoudig, zoals 'Het zwaartepunt van een massieve driehoek met vectoren' en 'Het zwaartepunt van een cirkelsector', tot nogal ingewikkeld, zoals 'Stabiliteit van schepen'[2], 'De druk van gestapelde tafelpoten' (bedoeld zal zijn 'De druk van tafelpoten bij gestapelde tafels') en 'Meer stapelen' (een stapel met overhangende stenen), en met als moeilijkheidsgraad daar tussenin bijvoorbeeld 'Mobiles' en 'Stevins clootcrans'.
Hoofdstuk 7 (*Antwoorden van enkele vragen*) ten slotte bevat de antwoorden op enkele cruciale vragen. Overigens, de antwoorden op alle vragen zijn te vinden op de website van het boekje.[3]

Conclusie

De technieken die in het boekje behandeld worden, zijn eenvoudig te doorgronden, zeker als ze gebaseerd zijn op vectoren. In hoofdstuk 5 neigt dat wellicht tot wat eentonigheid. En wat mij betreft zou er best 'iets meer Stevin' in het boekje gemogen hebben. Leuk is het om te zien, en voor de onbevangen lezer om te ervaren, dat een zwaartepunt meer is dan het snijpunt van (ten minste) twee zwaartelijnen. Jammer (geen omissie!) is het dat toch niet (heel) even het verband is gelegd tussen de meetkundige behandeling van het zwaartepunt en die met behulp van de integraalrekening. De 40 studielasturen voor de bestudering van de hoofdstukken 0 tot en met 5 zijn zeker juist geschat. Kortom: het boekje is aan te bevelen aan een ieder die geïnteresseerd is in wiskunde en haar toepassingen.

Noten

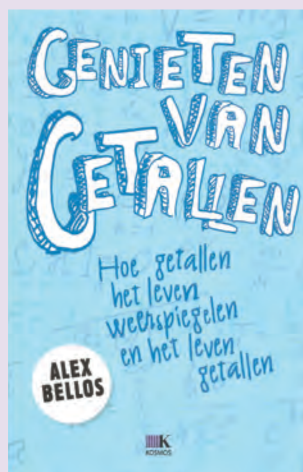
[1] Drijvers, P., & Tjon Soei Sjoe, K. (2013). (Werk) woorden in de centrale examens. *Euclides, 88*(4), 162-164.
[2] De op pagina 60 'beloofde' bijbehorende applet is op de website van Epsilon Uitgaven niet te vinden (datum van raadplegen: 19 september 2014).
[3] *www.epsilon-uitgaven.nl/Z39.php*

Over de recensent

Dick Klingens was van mei 2000 tot juni 2014 (eind) redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij als wiskundeleraar en schoolleider verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Van 2007 tot eind 2012 was hij lid van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo.
E-mailadres: *dklingens@gmail.com*

VERSCHENEN

GENIETEN VAN GETALLEN



Ondertitel: Hoe getallen het leven weerspiegelen en het leven getallen
Auteur: Alex Bellos
Uitgever: Kosmos Uitgevers, Utrecht/Antwerpen (2014)
ISBN: 978-90-215-4963-7
Prijs: € 14,99 (382 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

Alex Bellos neemt je mee op een ontdekkingsreis door de wereld van getallen. Maak kennis met driehoeken, rotaties, machtsverheffen, fractals, kegels, priemgetallen, de Mandelbrotverzameling en zelfs de gevreesde calculus. Dit alles beschrijft hij op zo'n heldere en gepassioneerde manier dat het leuk is om over wiskunde te lezen.
Ook komen minder exacte vragen aan bod, zoals waarom vinden we het ene getal 'mooier' dan het andere? Bellos geeft vele grappige wetenswaardigheden over getallen; wist je bijvoorbeeld dat kennis van wiskunde je kansen bij het daten kan verhogen?
Getallen weerspiegelen het leven, en het leven getallen. Met Alex Bellos is wiskunde genieten!

VERSCHENEN

DE PRACHT VAN PRIEMGETALLEN



Ondertitel: Het verhaal van een eeuwenlange zoektocht naar verborgen patronen
Auteurs: Paul Levrie en Rudi Penne
Uitgever: Prometheus-Bert Bakker, Amsterdam (2014)
ISBN: 978-90-351-3863-6
Prijs: € 17,95 (196 pagina's; paperback)

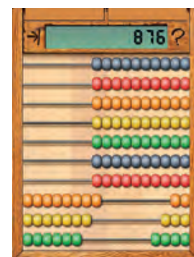
Van de achterkaft

Wie als eerste een priemgetal van minstens 100 miljoen cijfers vindt, krijgt een prijs van 150.000 dollar. Het grootst bekende priemgetal tot op heden telt 17.425.170 cijfers. Waarom zijn priemgetallen zo belangrijk? Wat maakt ze zo intrigerend? Je komt ze tegen op de onverwachtste plaatsen: bij onlinebankieren, in de voorplantingscyclus van cicaden, bij pogingen om contact te leggen met buitenaardse wezens, en zelfs in titels van bestsellers.
Priemgetallen zijn bouwstenen van alle getallen en worden al meer dan 2000 jaar grondig bestudeerd. Maar tot dusver weigeren ze hun geheim prijs te geven, want ze blijken even onvermijdelijk als onvoorspelbaar. Dit boek vertelt met de nodige humor de geschiedenis van de langste zoektocht ooit, een zoektocht naar verborgen patronen in schijnbare willekeur. Maar het verhaalt vooral de lotgevallen van de vaak kleurrijke helden wier leven grotendeels in het teken stond van hun passie voor priemgetallen. Het boek is geschreven voor niet-wiskundige lezers die heimelijk toch geïntrigeerd zijn door dit mysterieuze vak, de koningin van de wetenschappen, dat treffend beschreven wordt in het voorwoord van Jean Paul van Bendegem.

RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

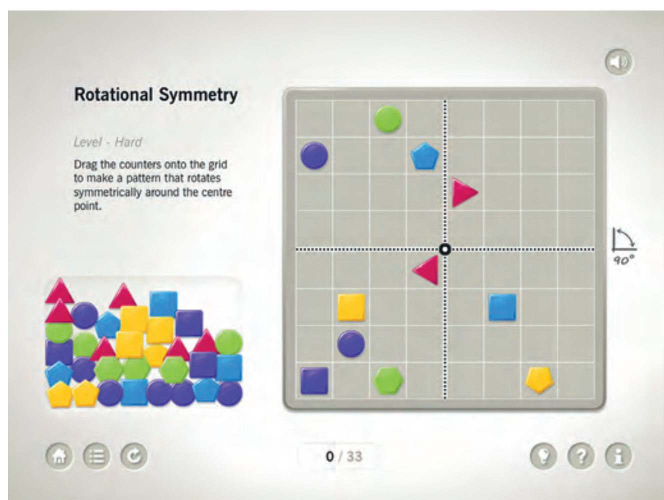
Lonneke Boels

SYMMETRY SCHOOL: LEARNING GEOMETRY



Deze keer laat Lonneke Boels u kennismaken met een spel gebaseerd op symmetrie. Ook te gebruiken op een digitaal schoolbord, dus misschien iets om de les mee af te sluiten?

Een echt spel met echte wiskunde, zo kun je *symmetry school: learning geometry* het beste omschrijven. Enerzijds is het een spel, want het kent niveaus en uitdagingen, inclusief meldingen van fouten. Anderzijds is het echte wiskunde: lijnsymmetrie, draaisymmetrie en 'vrij spel'. Voor de eerste twee kun je kiezen uit de niveaus gemakkelijk, gemiddeld en moeilijk. Het spelbord start met een aantal figuurtjes op het bord. De rest moet je zelf plaatsen op zo'n manier dat de figuur draaisymmetrisch wordt. In figuur 1 moeten er bijvoorbeeld nog drie paarse vierkanten worden geplaatst; in de linkerbovenhoek, rechterbovenhoek en rechteronderhoek. Met leerlingen kun je hierover spreken: hoe komt het dat het nu niet uitmaakt dat het draaisymmetrie is (bij lijnsymmetrie zouden de vierkanten precies hetzelfde worden geplaatst)?



figuur 1

Evenzo moeten er ook nog drie gele en drie lichtblauwe vierkanten worden geplaatst. Het verschil tussen draaisymmetrie en lijnsymmetrie wordt bijvoorbeeld wel zichtbaar bij de plaatsing van de gele vierkanten. Ten opzichte van het gele vierkantje dat er al staat, moet het volgende gele vierkantje niet drie hoger worden geplaatst (zoals bij lijnsymmetrie) maar vier hoger en een naar rechts. Het punt van symmetrie is altijd in het midden in dit spel en de kleinste draaihoek is altijd 90 graden. Vooral de vijfhoeken zijn bij draaisymmetrie lastig om te plaatsen omdat met de draaiing van de vijfhoeken rekening moet worden gehouden.

Het spel is volgens de makers ook gratis beschikbaar voor het digitale bord. Hiervoor moet je je registreren – iets wat ik niet uitgeprobeerd heb. De code voor deze registratie is te vinden in de *app* zelf.

Pluspunten

- het is een echt spel;
- leerlingen leren symmetrie hierdoor beter begrijpen;
- door de verschillende niveaus is het voor veel leeftijden en schoolniveaus geschikt, vooral voor bovenbouw basisschool en onderbouw middelbare school;
- het spel is ook geschikt voor kleurenblinden met de optie 'patronen' in plaats van 'kleuren';
- het laat eigen producties van leerlingen toe in de 'vrij spel'-variant;
- er is een gratis versie voor het digitale schoolbord via een activatiecode in de *app* na registratie op de site (niet getest).

Minpunten

- het is alleen voor de onderbouw van het vo geschikt; bovenbouwleerlingen, zeker van havo en vwo, zullen het waarschijnlijk te gemakkelijk vinden;
- de 'vrij spel'-variant laat ook niet-symmetrische figuren toe en dat is verwarrend in een spel dat over symmetrie gaat;
- alleen draaisymmetrie over 90 graden is mogelijk
- het spel kent acht talen, waaronder Engels, Frans en Duits, maar (nog) geen Nederlands.

Geschikt voor: basisschool groep 6, 7, 8, vmbo, havo en vwo.

Eindoordeel: aanschaffen

Kosten: € 3,59
Getest op: iPad met iOS7.
Meer informatie: *www.spraoischool.com*

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen en freelance docent vakdidactiek rekenen op pabo's. E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

NOTULEN VAN DE NVVW-JAARVERGADERING

Kees Lagerwaard

ZATERDAG 9 NOVEMBER 2013, VEENENDAAL

Opening
Voorzitter Marian Kollenveld opent de jaarvergadering. Ze heet allen van harte welkom. Een speciaal welkom is er voor ereleden van onze vereniging, voor de voorzitter van onze Vlaamse zustervereniging en voor andere genodigden.

Jaarrede
De voorzitter spreekt de jaarrede uit. De volledige tekst van de jaarrede is terug te lezen in *Euclides* nummer 3 van jaargang 89.

Notulen
De notulen van de jaarvergadering 2012 worden zonder vragen of opmerkingen vastgesteld.

Jaarverslagen
Over het NVvW-jaarverslag van verenigingsjaar 2012-2013 wenst geen der aanwezigen het woord. Ook het jaarverslag *Euclides* jaargang 88 lokt geen vragen of opmerkingen uit. De twee jaarverslagen worden vastgesteld onder dankzegging aan de auteurs Marjanne de Nijs en Kees Lagerwaard.

Financiën
Penningmeester Gert de Kleuver licht de beknopte jaarrekening 2012-2013 en de exploitatierekening over het boekjaar 2012-2013 toe. Het nadelig saldo van bijna 46000 euro is deels veroorzaakt door de vernieuwing van de website, de nieuwe opzet van de ledenadministratie en de restyling van *Euclides*. Daarnaast waren de nummers van *Euclides* afgelopen jaar dikker en daarmee duurder. Ook is er een bedrag gereserveerd voor de viering van het 90-jarig jubileum in 2015. De kascontrolecommissie, bestaande uit de heren Van Leeuwe en Bartels, heeft de stukken in orde bevonden. De vergadering stemt met applaus in met het voorstel de penningmeester te dechargeren voor het dit jaar gevoerde beleid. Ook is er applaus voor de inspanningen die Elly en Pim van Bemmel samen met de penningmeester hebben geleverd. De penningmeester geeft aan dat de begroting voor 2014/2015 een tekort van 25000 euro vertoont, ondanks het feit dat er krap is begroot. Hij stelt dan ook voor de contributie in 2014 te verhogen. Gewone leden gaan dan 80 euro betalen, studenten en gepensioneerden 40 euro. Ook andere lidmaatschapsbedragen en de tarieven voor abonnementen op *Euclides* worden aangepast. Daarmee ontstaat een sluitende begroting. Het idee om een commercieel aantrekkelijker bedrag van 79 euro te kiezen, krijgt geen steun. De vergadering stemt in met de voorgestelde contributieverhoging.

Bestuursverkiezing
De bestuursleden mevr. M. A. Lambriex-van der Heijden en C. Boudri zijn aftredend en herkiesbaar. Er zijn geen tegenkandidaten voorgedragen. Derhalve zijn ze beiden herkozen. Bestuurslid J. Gademan is aftredend en stelt zich niet herkiesbaar. Het bestuur heeft geen kandidaat ter vervanging voorgedragen. De heer Gademan was de motor achter de vernieuwing van de website, de nieuwe opzet van de ledenadministratie en het NVvW-twitteraccount. De komende maanden blijft hij nog actief betrokken bij de afronding van deze vernieuwingsprocessen. Daarna neemt het bestuur, samen met de webmasters, afscheid van hem als bestuurslid.

Rondvraag
Hiervan wordt geen gebruik gemaakt.

Sluiting
De voorzitter sluit de jaarvergadering en geeft het woord aan Henk van der Kooij voor het inleiden van de studiedag.

De jaarverslagen voor de komende vergadering op **zaterdag 8 november 2014** kunt u vinden op de digitale editie:

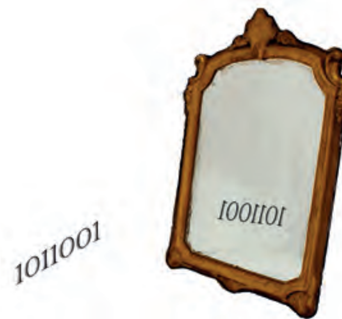
 *vakbladeuclides.nl/902nvvw*

 *vakbladeuclides.nl/902euclides*

PUZZEL 90-2

SPIEGELENDE RECURSIE

Lieke de Rooij
Wobien Doyer



Deze puzzel is een variatie op een opgave, waar H. Klein ons op attendeerde. Voor de functie $B(n)$, met n geheel niet negatief geldt: $B(0) = 0$ en $B(1) = 1$. Verder is gegeven de recursie
$B(2k) = B(k)$ en $B(4k+1) = 2 \cdot B(2k+1) - B(k)$ voor $k > 0$ en
$B(4k+3) = 3 \cdot B(2k+1) - 2 \cdot B(k)$ voor $k \geq 0$.
Opgave 1 – Geef de berekening van $B(14)$ met behulp van recursie (dus zonder de onderstaande spiegelstelling).

Spiegelstelling: Als we n en $B(n)$ in het tweetallig stelsel (=binair) schrijven, dan is het rijtje enen en nullen van $B(n)$ het spiegelbeeld van dat van n. Bijvoorbeeld binair $b = 1011$ geeft $B(b) = 1101$, dus 10-tallig $B(11) = 13$. Of $b = 10110$ geeft $B(b) = 01101 = 1101$. Die eerste 0 voegt niets toe. Het bewijs van de spiegelstelling gaat, zoals te verwachten is bij recursie, met volledige inductie. U kunt zelf gemakkelijk nagaan dat de stelling klopt voor $n = 0$ en $n = 1$. Voor $n > 1$ moeten we dus voor elk van de drie recursievergelijkingen aantonen dat als de stelling klopt voor het rechterlid, hij ook geldt voor het linkerlid.

Opgave 2a – Toon aan dat als de spiegelstelling klopt voor $n = k$, hij ook geldt voor $n = 2k$.
Opgave 2b – Idem voor $n = 4k + 1$.
Opgave 2c – Idem voor $n = 4k + 3$.

Het is u waarschijnlijk opgevallen dat in een aantal gevallen geldt $B(n) = n$ en dat heeft natuurlijk alles te maken met palindromen en de spiegelstelling.
Opgave 3 – Hoe vaak geldt, gegeven de spiegelstelling: $B(n) = n$ voor $1 \leq n \leq 1000$, waarbij n en $B(n)$ tientallig.

Opgaven 4 en 5 zijn alternatieven met gelijk aantal punten voor de ladder. Voor het maximale aantal punten hoeft u maar één van de twee in te zenden. Allebei mag ook, maar we tellen alleen de punten van de opgave waarbij u het hoogst heeft gescoord.
Opgave 4a – We bekijken de som S_t van alle $B(i)$ voor $0 \leq i \leq t$: $S_t = \sum_{i=0}^{t} B_i$. Bepaal die S_t voor $t = 64$.

Opgave 4b – Zoek een zo elegant mogelijke formule voor S_t als $t = 2^m$.

Voor opgave 5 bekijken we de functie $T(n)$, een ternaire variant van $B(n)$. Zowel n als $T(n)$ noteren we in het drietallig stelsel. We zoeken recursievergelijkingen zodanig dat ook voor $T(n)$ de spiegelstelling geldt. Bijvoorbeeld als $n = 120$ in het drietallig stelsel, dan geldt $T(120) = 21$ dus tientallig: $T(15) = 7$. Om ook deze functie te beschrijven met recursie zijn meer vergelijkingen nodig dan voor de tweetallige variant $B(n)$. Om u op weg te helpen geven we een van de recursievergelijkingen voor $n = 9k + 1$: $T(9k+1) = 3 \cdot T(3k+1) - 2 \cdot T(k)$ voor $k > 0$. Hoewel dit ingewikkelder is dan in het tweetallig stelsel, is het systeem wel analoog aan het binaire systeem.

Opgave 5 – Bepaal een set recursievergelijkingen en beginwaarden zodanig dat de spiegelstelling klopt in het drietallig stelsel. Probeer daarbij die vergelijkingen zo eenvoudig mogelijk te houden, dus zo min mogelijk vergelijkingen, zo min mogelijk termen met zo klein mogelijke coëfficiënten.

Inzenden oplossingen
Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd, en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. De deadline is 24 november a.s. Wij wensen u veel plezier.

UITWERKING PUZZEL 89-7

STOELENDANS OP EEN TERRASJE

Wobien Doyer
Lieke de Rooij

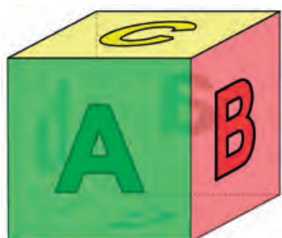
Bij deze puzzel moest bij verschillende tafels met n mensen en n stoelen worden bepaald hoeveel tafelschikkingen er mogelijk zijn na een stoelendans waarbij iedereen hoogstens één plaats mag opschuiven en vervolgens alle stoelen weer zijn bezet, zonder dat er stoelen worden bijgezet of weggehaald.
De stoelen staan op een rijtje (**opgave 1**) of in een kring, waarbij we rotaties van de kring niet als nieuwe tafelschikking rekenen (**opgave 2**).

a. Bepaal het aantal tafelschikkingen met $n = 6$.
b. Geef een algemene formule voor n stoelen.
c. Welke oude meester werd hier in het zonnetje gezet?

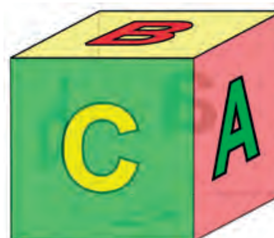
Opgave 1 – Om te zorgen dat alle stoelen weer bezet zijn, zijn alleen verwisselingen van twee buren mogelijk. Voor $n = 6$ is dit nog uit te schijven. Het zijn er 13 (vraag a). Maar we kunnen dit recursief bepalen: Stel $R(n)$ is het aantal mogelijkheden voor n stoelen op een rijtje. Persoon 1 kan al of niet met zijn buurman ruilen. Doet hij dat niet, dan hebben de overige $n – 1$ personen $R(n–1)$ mogelijkheden. Doet hij dat wel, dan zijn er $n – 2$ personen over die $R(n–2)$ mogelijkheden hebben. Dus $R(n) = R(n–1) + R(n–2)$. Met $R(1) = 1$ en $R(2) = 2$ geeft dat de rij van Fibonacci, die echter begint met

$F(1) = F(2) = 1$. Dus $R(n) = F(n+1)$ (vraag b en c). Met de formule van De Moivre hebben we ook een directe formule: $R(n) = \dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}.\sqrt{5}}$

Opgave 2 – Laat $K(n)$ het aantal mogelijkheden zijn voor een kring. We bekijken $n > 4$. Nummer 1 kan al of niet met nummer n wisselen. Doet hij dat niet, dan hebben we opgave 1, met $R(n) = F(n+1)$ mogelijkheden, Doet hij dat wel, dan hebben de $n – 2$ overige personen $R(n–2) = F(n–1)$ mogelijkheden. Totaal dus $K(n) = F(n+1) + F(n–1)$. Deze rij staat bekend als de rij van Lucas, de oude meester die hier is komen kijken, met dezelfde recursie als Fibonacci, maar startwaarden $L(1) = 1$ en $L(2) = 3$. Merk wel op dat voor $n \leq 4$ bij de boven beschreven methode er mogelijkheden dubbel zouden worden geteld. De volledige beschrijving is: $K(1) = 1$, $K(2) = 1$, $K(3) = 2$, $K(4) = 6$ en voor $n > 4$: $K(n) = L(n)$. Dus $K(6) = 18$. Merk ook op dat tot en met $n = 4$ alle permutaties van de kring mogelijk zijn.
Behalve de bedoelde oude meesters werden er terecht meerdere anderen aan de tafels gezet, zoals Pascal, maar ook Bert Zwaneveld, die met een eigen artikel in *Euclides* 89-7 stond.

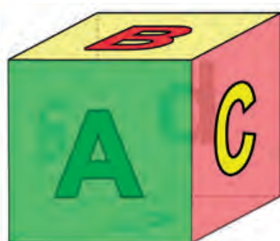


figuur 1

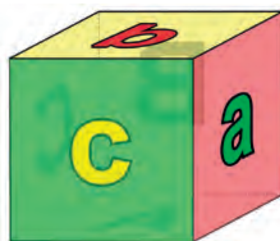


figuur 2

Opgave 3 – Hier hebben we te maken met een dans in de ruimte: De tafel is nu een kubus, waar aan elk zijvlak een stoel staat. Er zijn dan zes stoelen en zes personen. De tafel zweeft vrij in de ruimte, dus tafelschikkingen die door rotatie in elkaar overgaan zijn identiek. Spiegelingen niet.
3a – Hoeveel verschillende tafelschikkingen zijn er? Om zes personen te schikken op een kubus kiezen we eerst de drie paren die op overstaande zijden komen te zitten. Dat kan op 15 manieren. Daarna ligt de schikking, op spiegeling na, geheel vast. Er zijn dus 30 schikkingen mogelijk.
3b – Nu mogen de personen na een ruimtelijke dans plaats nemen op hun oorspronkelijke stoel, of een stoel daarnaast. Hoeveel mogelijke schikkingen biedt dat? We gaan uit van een schikking met drie paren personen op overstaande zijden, (A,a), (B,b) en (C,c), gerangschikt zoals in figuur 1. Dan



figuur 3



figuur 4

staan er rond elk hoekpunt de letters a, b en c, in hoofd- en/of kleine letters. Mogelijke resultaten van een dans verdelen we in twee groepen:
Er is minstens één paar gelijk gebleven. De vier andere personen vormen dan een kring. In opgave 2 hebben we gezien dat met vier personen in een kring alle permutaties mogelijk zijn. Alle schikkingen uit groep 1 zijn dus te realiseren door alleen stuivertje wisselen. En dat zijn er veertien.
Geen van de drie paren is gelijk gebleven. Daarvoor zijn acht mogelijkheden. Inclusief spiegelbeelden zijn dat de overige zestien schikkingen. We hebben als voorbeeld gekozen voor de paren (A,b), (B,c) en (C,a). De andere zeven mogelijkheden kunt u laten ontstaan door hoofdletters met kleine letters te verwisselen en zijn dus analoog. Er zijn meerdere dansen mogelijk om onze parenkeuze te realiseren. Een daarvan is een 3-cykel en wel ABC linksom, een legale dans. In figuur 2 ziet u het resultaat. Met 3-cykels linksom rond de andere hoekpunten verkrijgen we de overige zeven mogelijkheden en dus acht verschillende tafelschikkingen. De acht spiegelbeelden daarvan missen we nog. Een tweede manier om dezelfde drie paren te krijgen is: Verwissel B met C en a met b (zie figuur 3). Dan zijn alle drie de paren zoals bedoeld. Dit is het spiegelbeeld van figuur 2, immers A, B en C hebben na de cyclische verwisseling dezelfde omloop richting als in het origineel. Na verwisseling van A en B is die richting omgekeerd. Conclusie: alle 30 mogelijke tafelschikkingen kunnen op deze wijze ontstaan.
Vraag 3c – Hier mag iedereen hoogstens één keer plaatsverwisselen met één van zijn buren. De meeste inzenders hebben alle mogelijke dansen met 2-cykels uitgeprobeerd en komen op 22 schikkingen. We doen hier een poging het te beredeneren.
Van de procedures die we bij 3b hebben bekeken, mogen alleen de 3-cykels niet. We gaan aantonen dat we de acht daardoor ontstane schikkingen niet kunnen krijgen door twee aan twee te ruilen.
Een 3-cykel speelt zich af rond één hoekpunt. Na de verwisseling blijft dat zo, en wel in dezelfde volgorde. Willen we ditzelfde (figuur 2) bereiken met alleen stuivertje wisselen, dan moet er tenminste één uit ABC aan zo'n wissel meedoen. Anders kan nooit iedereen een andere overbuur krijgen.
Maar A, B en C moeten na de dans ook weer rondom één hoekpunt liggen. Dat kan alleen het oorspronkelijke hoekpunt zijn of het er diametraal tegenover liggende hoekpunt. Dus er vindt een ruil plaats binnen ABC (figuur 3), of ze verhuizen alle drie naar een zijvlak dat grenst aan dat overliggende hoekpunt, zie figuur 4. In beide gevallen keert de volgorde om en krijgen we niet de schikking van figuur 2, maar weer het spiegelbeeld. Conclusie: met alleen 2-cykels lukt het niet om dezelfde acht schikkingen te verkrijgen als na een 3-cyclische dans. Er zijn dus 22 schikkingen mogelijk. Harm Bakker onderzocht opgave 3 ook voor de andere vier platonische lichamen. Met behulp van zijn computer presteerde hij het om de vragen a, b en c voor het regelmatige vier-, acht- en twaalfvlak, en vraag 3a voor het regelmatige twintigvlak te beantwoorden.

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na 89-7 is:

J. Meerhof	184
H. Bakker	172
R. Stolwijk	151
G. Riphagen	142
L. Pos	136
J. Remijn	130
J. Verbakel	110
H. Linders	109
J. Guichelaar	91
K. van der Straaten	74

De ladderprijs is gewonnen door Jan Meerhof. Hartelijk gefeliciteerd daarmee!

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Marjanne de Nijs, hoofd- en eindredacteur
Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur
Nathalie Kuijpers, adjunct-eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Annelien Jonkman
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Heiner Wind, voorzitter

Inzenden bijdragen

Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld, Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04 E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard, Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46 E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 50,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. t.a.v. F. van Dop
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-leraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2014

vr 7/11 EINDHOVEN
Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

vr 8/11 VEENENDAAL
Jaarvergadering/Studiedag, zie ook pagina 38
Organisatie NVvW

vr 21/11 ZWOLLE
Bartjens Rekendictee
Organisatie NWO

za 26/11 EDE
Tweede Fase-congres
Organisatie Noordhoff Uitgevers

2015

za 10/1 UTRECHT
Wintersymposium KWG: Dataverwerking en statistiek
Organisatie KWG

19/1 t/m 29/1 LANDELIJK
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

vr/za 30/1 31/1 NOORDWIJKERHOUT
Nationale Wiskundedagen
Organisatie Freudenthal Instituut

vr 19/03 OP DE SCHOLEN
W4 Kangoeroewedstrijd
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvvw.nl/euclricht.html

JAARGANG 90

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
3	16 december 2014	27 oktober 2014
4	5 februari 2015	4 december 2014
5	24 maart 2015	19 januari 2015
6	13 mei 2015	16 maart 2015
7	30 juni 2015	18 mei 2015